

GEOMETRIA DINAMICA

Con animazione al computer e alla LIM

(Omessa in questo file, si trova nello stesso file completo, disponibile nel sito www.monachesi.it, da cui si può scaricare liberamente.)

di Ennio Monachesi

SITO www.monachesi.it

Questo file contiene alcune riflessioni e proposte didattiche per apprendere costruttivamente alcuni importanti concetti di geometria con l'uso di sussidi concreti, come **il meccano**, e di **animazioni al computer**. L'approccio è in parte **narrativo**, raccontando alcune **reali esperienze** didattiche significative per evidenziare la grande utilità ed efficacia di alcuni **sussidi e materiali concreti**, se usati bene, con una didattica **laboratoriale**, per comprendere concetti essenziali che spesso restano molto più difficili se presentati nel tradizionale modo astratto ed espositivo, anche se supportato dal disegno. Un esempio molto bello è costituito dagli ormai famosi **stecchini** della **Castelnuovo** per risolvere facilmente problemi di **rapporto** attraverso la **costruzione concreta** di figure. Non bisogna tuttavia trascurare la **verbalizzazione** significativa, molto importante per la comprensione dei **concetti** e delle corrispondenti **parole**, dei **simboli** e dei **testi** che li esprimono, con un graduale processo di **astrazione significativa** per evitare il simbolismo astratto e mnemonico ed il vuoto verbalismo.

Si propongono infine alcune schede con delle semplici **animazioni al computer** relative all'area dei poligoni.

La matematica dello zio

Manca poco più di un mese agli **esami** di terza media. **Giorgio**, ragazzo intelligente e studioso che deve sostenerli, ha **alcune lacune** in matematica a causa di un apprendimento alquanto mnemonico.

Lo scrivente zio vuole aiutarlo, e così ci mettiamo al lavoro.

Prendiamo il **cilindro di cartoncino** all'interno dei rotoli di **carta igienica**, forbici, cartone e un pezzo di vilpelle. Ritagliamo un **rettangolo** di **vilpelle** avente per **base** la **circonferenza** del cerchio-base del cilindro e per altezza **l'altezza del cilindro** stesso, con cui lo **avvolgiamo: superficie laterale**.

Giorgio suggerisce di incollarla al cilindro da un lato lungo l'altezza, in modo che si possa **avvolgere e svolgere**, e così facciamo.

Poi ritagliamo un **cerchio di cartone** che entri esattamente nel cilindro, lo attacchiamo, nel centro, con l'attaccatutto, all'estremità appiattita di una matita, a mo' di largo sombrero, e lo facciamo **scorrere**, come un **pistone piatto, dentro il cilindro** vedendo che **l'area di base** del cilindro, rappresentata dal suddetto **cerchio** di cartone, **scorrendoci dentro** per tutta l'altezza, attraversa il **volume** del cilindro, (lo "**genera**"), capendo il perché della formula per calcolarlo, e cioè **area di base** per **altezza**, sebbene in modo **analogico**, perché il concetto di **moltiplicazione è diverso**, come spiego e faccio capire a Giorgio.

Poi infiliamo un'**elastichetta** intorno al cilindro, visualizzando con essa la **circonferenza** del cerchio-base, facendola **scorrere** dal basso verso l'alto, lungo la superficie laterale, (che viene così "**generata**"), facendo intuire, sempre per **analogia**, la formula per il calcolo dell'area della superficie **laterale**.

Ma tale approccio intuitivo può generare **confusione** tra il concetto di "**generazione**", a cui si riferiscono gli esempi fatti, e quello di "**misurazione**." Richiamo perciò tali concetti peraltro già appresi nella scuola elementare.

Poi costruiamo **un cono** con la **superficie laterale** che si può ugualmente avvolgere e svolgere, vedendo che corrisponde, con un po' di immaginazione, ad un triangolo avente per base la circonferenza del cerchio-base del cono e per altezza l'apotema del cono stesso. Mettiamo dentro il cono una **matita per altezza**, visualizzando concretamente che **l'apotema** del cono è **l'ipotenusa** di un triangolo rettangolo avente come cateti **l'altezza** del cono ed il **raggio** del suo cerchio-base, con le relative applicazioni del teorema di Pitagora.

Riempiamo di **farina** un cono e un cilindro con uguale base ed altezza, e constatiamo che la farina contenuta nel cilindro **pesa 3 volte di più** di quella contenuta nel cono, da cui la formula del volume del cono. Idem per il **prisma retto** e la **piramide**. Sempre **costruendo, osservando, verbalizzando e concettualizzando** i processi, le operazioni e le formule dirette e inverse.

Dopo tali attività, ed un certo numero di problemi risolti anche solo oralmente, concentrandosi sul procedimento, in 4 o 5 sedute didattiche, **Giorgio** aveva capito benissimo i concetti, padroneggiando con sicurezza le varie formule, cosa che gli consentì di **risolvere brillantemente** in modo **originale il problema** e le prove scritte dell'esame, tanto che la **professoressa**, alquanto sorpresa, se ne **complimentò** vivamente con lui.

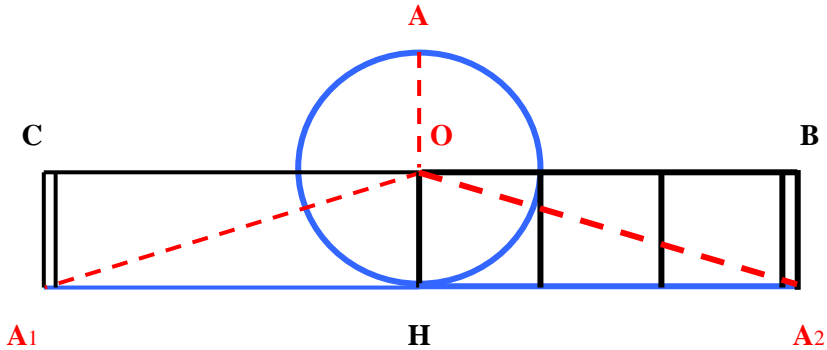
Certo, fare tale lavoro **a casa** individualmente è più **facile**: però si può fare anche a scuola. Tra l'altro con **più soddisfazione e meno fatica**, sia degli alunni che degli insegnanti. I quali spesso usano **il disegno** per spiegare. Ma la **manipolazione** e l'animazione sono molto più efficaci, assicurando una comprensione più rapida, solida e profonda.

I **sussidi concreti**, inoltre, se usati bene, sono un potente **trampolino di lancio** verso l'astrazione, per far capire meglio e afferrare i concetti, ed esprimerli con i **linguaggi** e i **simboli astratti**, evitando il verbalismo vuoto e mnemonico. I quali spesso dipendono proprio dal mancato uso di sussidi concreti, pensando che gli alunni capiscono grazie alle spiegazioni verbali, magari accompagnate da qualche disegno: così facendo, però, si rischia di mettere il **carro** davanti ai **buoi**.

**Concetti indipendenti dalla posizione delle figure:
superare le misconcezioni.**

Usando sussidi concreti è anche facile disporre e visualizzare le **varie figure geometriche in posizioni** diverse per **evitare** che i **concetti geometrici** si leghino erroneamente a **particolari posizioni** delle figure disegnate staticamente, col rischio di favorire il formarsi di alcune “**misconcezioni**” piuttosto frequenti.

Aurelio stupisce il maestro ed anche il direttore



Immagino di tagliare il cerchio lungo il raggio superiore AO, dividendo il semicerchio superiore in 2 parti, portando in basso le 2 parti stesse, una a sinistra e l'altra a destra, allungando le 2 linee prodotte dal taglio fino ad ottenere OA₁ e OA₂, distendendo la circonferenza fino a formare il segmento A₁A₂ uguale alla circonferenza stessa. Trasformo così il cerchio nel triangolo A₁OA₂, equivalente al cerchio ed alla metà del rettangolo A₁A₂BC, avente la base uguale alla circonferenza e l'altezza uguale al raggio. Per calcolare l'area del cerchio basta calcolare l'area del triangolo A₁OA₂ e cioè: raggio per 6,28 = circonferenza (base); questa per raggio (altezza) = area del rettangolo A₁A₂BC; ed infine diviso 2. Sviluppando si ottiene la formula: $A = r \times r \times 3,14$.

Il cerchio è infatti equivalente alla metà del rettangolo A₁A₂BC e quindi al rettangolo OHA₂B: il quale, come si può vedere dal disegno, è formato appunto da 3 quadrati del raggio più 14 centesimi. Lo scrivente, giovane maestro di campagna, aveva spiegato così l'area del cerchio, e, con manipolazioni di altre figure geometriche concrete, aveva insegnato a scomporle e ricomporle per dimostrarne l'equiestensione e l'equivalenza a un rettangolo o alla sua metà, e quindi calcolarne l'area. (vedi avanti)

Gli alunni avevano così acquisito e consolidato **tale principio** e tale metodo, abituandosi anche a trovare **soluzioni originali**.

In classe quinta, prima di iniziare lo studio dei volumi, il maestro propose agli alunni di provare a calcolare **da soli, a casa, il volume** di un **parallelepipedo** rettangolo, o anche di un **cilindro**, in piena libertà, come meglio credevano, senza preoccuparsi affatto del rischio di poter sbagliare.

Il maestro accennò poi, così, sbrigativamente, che per calcolare il volume del parallelepipedo rettangolo si poteva immaginare uno **strato** di tanti **metri cubi** (o cm cubi o dm cubi) sopra **ai metri quadrati della base**, corrispondenti all'area di base del parallelepipedo; e poi ci si poteva disporre sopra un secondo strato, e poi un terzo, tutti uguali al primo, ecc...**tante volte, tanti strati** quanti erano **i metri dell'altezza** del parallelepipedo.

Il maestro voleva vedere se e quanti alunni sarebbero riusciti da soli, con il piccolo aiuto fornitogli, a **generalizzare e trasferire** al calcolo **dei volumi** le procedure ed i principi acquisiti per il calcolo **delle aree**. Il giorno seguente era molto curioso di vedere i risultati. Costatò che parecchi alunni erano riusciti abbastanza bene, altri un po' meno, secondo le loro capacità, a risolvere il problema, come peraltro egli si aspettava. Ma il fatto che **lo sorprese** e lo colpì molto fu che uno di essi, **Aurelio**, molto intelligente, abitante in campagna, (perciò i compiti li faceva da solo), gli disse: -Maestro, io ho calcolato **il volume** di un cilindro **in due modi diversi**.

-Fammi un po' vedere?-, gli chiese il maestro incuriosito e speranzoso, ma anche alquanto scettico. Guardò il quaderno e vide che in effetti Aurelio aveva calcolato il volume di un cilindro **in 2 modi** diversi.

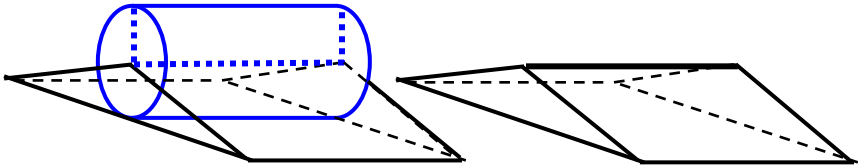
Il secondo era quello **solito**: area del cerchio-base per altezza.

Il primo modo, invece, era quello **originale**: il risultato era esatto, ma il procedimento non gli era chiaro.

Il maestro chiese ad Aurelio di spiegargli come aveva fatto, e lui gli rispose: -Ho fatto **come** facevamo con **il cerchio**.

Poi spiegò meglio che cosa intendeva dire.

Aurelio aveva immaginato di appoggiare il cilindro sulla sua superficie laterale, **tagliandolo** lungo l'altezza per metà, con una profondità pari al **raggio** del cerchio-base, fino all'asse centrale.



Aveva poi immaginato di **aprire il cilindro** e distenderlo sulla sua **superficie laterale**, ottenendo così un **prisma retto triangolare** equivalente, appoggiato sulla faccia corrispondente alla superficie laterale del cilindro stesso: il prisma triangolare così ottenuto era la **metà** del **parallelepipedo** rettangolo avente per **base** la superficie laterale del cilindro e per **altezza il raggio** del cerchio-base.

Quindi, per calcolarne il volume, prima aveva calcolato l'area della **superficie laterale** del cilindro; poi l'aveva moltiplicata **per il raggio** del cerchio-base, ottenendo il volume del **parallelepipedo doppio** del prisma triangolare equivalente al cilindro; ed infine l'aveva **diviso per 2**.

Approfondendo troviamo un **terzo** procedimento:

-raggio del cerchio-base **per altezza** del cilindro = **area della faccia laterale** minore del **parallelepipedo** rettangolo **doppio** del prisma triangolare equivalente al cilindro; moltiplicata **per la circonferenza** del cerchio-base = volume del parallelepipedo suddetto; ed infine **diviso 2**.

Aurelio era riuscito a trovare una soluzione originale grazie certamente alla sua spiccata intelligenza, ma anche grazie al fatto che il maestro gli aveva fatto **capire** e **consolidare** bene i concetti con una guida e con attività intelligenti e significative, tra cui quella di “**scoprire**”, anche in collaborazione, procedimenti **diversi** per risolvere i **problemi**, **senza** la **paura** di **sbagliare**.

Aveva avuto così la bella intuizione di “**trasferire**” (**transfer** e generalizzazione) al **cilindro**, per calcolarne il volume, una trasformazione **analoga** a quella che aveva imparato a fare con il **cerchio**, per calcolarne l’area, per **analogia**, che è un aspetto fondamentale della **creatività**, anche linguistica e poetica, su cui si fondano **similitudini** e **metafore**.

Ma come già detto la “**scoperta**”, più o meno guidata e cooperativa, la **creatività** e l’**autonomia**, sono favorite dalla piena **comprensione** dei concetti, appresi anche con la **guida** o “spiegazione” dell’insegnante, e dal loro **consolidamento** anche mediante **esercizi significativi**, come dice Hans **Freudenthal**: *“Ma vi è un modo di fare **esercizio** (incluso anche lo studio a **memoria**), in cui ogni piccolo passo aggiunge qualcosa al **tesoro** dell’ **intuizione**: si tratta dell’**esercizio accoppiato** con l’apprendimento per **intuizione**.”*

(Vedi APPRENDIMENTO-INSEGNAMENTO)

Proprio quel mattino, tra l’altro, arrivò il **direttore didattico**, l’unica volta in tutto l’anno scolastico, che rimase stupito anche lui ed apprezzò molto il fatto! Di solito invece i direttori arrivano in ben altri momenti!

Comprensione, consolidamento, scoperta guidata.

Nell'esperienza narrata l'intuizione originale, la “**scoperta**” di Aurelio è stata resa possibile perché aveva **capito bene** i concetti e le strategie per il calcolo delle superfici grazie anche alla **guida** significativa del maestro e li aveva **consolidati** grazie ad **esercizi significativi**, come dice Hans Freudenthal.

Hans Freudenthal distingue tra **esercizio mnemonico dannoso** ed esercizio **utile e significativo**: *“I fautori dell'apprendimento attraverso l'intuizione sono spesso accusati di trascurare l'esercizio. Ma piuttosto che contro l'esercizio io sono contro l'abilità che danneggia il ricordo dell'intuizione. Ma vi è un modo di fare esercizio (incluso anche lo studio a memoria), in cui ogni piccolo passo aggiunge qualcosa al tesoro dell'intuizione: si tratta dell'esercizio accoppiato con l'apprendimento per intuizione.”*

Il termine “**scoperta**”, inoltre, viene spesso usato come sinonimo di **comprensione**. **Pellerey** infatti precisa: *“Molte volte si parla di “scoperta” del bambino nel senso che egli afferra il significato di una proposizione o individua, con l'aiuto dell'insegnante, la strada risolutiva di un problema.”* (Pellerey, Progetto RICME, pag. 20)

In tal senso anche **Hans Freudenthal** nel libro “*Ripensando l'educazione matematica*”, parla di “**re-invenzione guidata**” come modalità fondamentale di un valido apprendimento.

(Vedi APPRENDIMENTO-INSEGNAMENTO, 7, 8, 9)

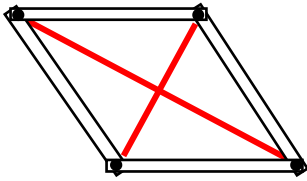
(Vedi esempi in FRAZIONI e NUMEROPERAZIONI)

Il meccano geometrico

Il meccano geometrico si può realizzare con sottili asticcioline di compensato forate alle estremità, congiunte con piccole viti. E' molto utile per fare significative trasformazioni di figure piane, come da esempi, utilizzando anche degli **elastici**.

ROMBO E QUADRATO

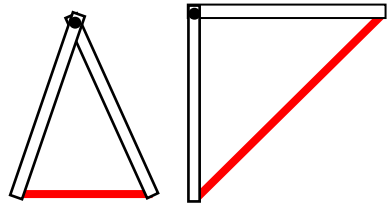
*Lati uguali e perimetro **costanti**
Area e angoli **variabili**.*



*Diagonali **elastiche** variabili*

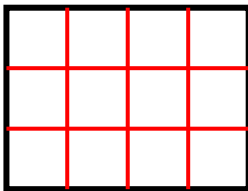
TRIANGOLO ISOSCELE

*Lati obliqui uguali **costanti**
Area e perimetro **variabili***

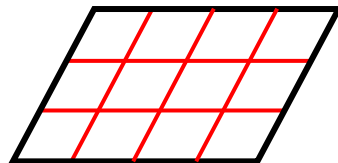


*Base **elastica** variabile*

Col meccano si può visualizzare **un quadrato** che si trasforma in **un rombo** mantenendo **costanti i lati** ed il **perimetro**, mentre **2 angoli opposti** diventano sempre **più piccoli** e gli altri 2 sempre **più ampi**, ed **una diagonale aumenta** mentre **l'altra diminuisce** (con **2 elastici**), e quindi anche **l'area diminuisce** sempre di più.



RETTANGOLO *trasformato in*

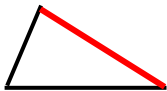



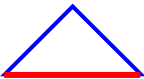
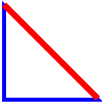
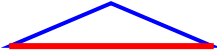
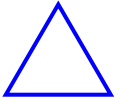


ROMBOIDE

*Lati e perimetro **costanti**. Angoli e area **variabili***

Per poter **variare** la lunghezza di **un lato di un triangolo**, si può usare **un elastico**. Ad es. un triangolo **isoscele acutangolo**, con un **elastico per base**, si può trasformare allungando la **base elastica**, aumentando anche **l'angolo al vertice**: giunto questo a **60 gradi**, si formerà un triangolo **equilatero**, con l'elastico-base uguale ai due lati obliqui; giunto, lo stesso angolo al vertice, a **90 gradi**, si formerà un triangolo **isoscele rettangolo** avente come cateti i 2 lati obliqui uguali; e giunto **oltre i 90 gradi** si formerà un triangolo **isoscele ottusangolo**. Anche il triangolo **scaleno** con un **lato elastico variabile** si può trasformare da **acutangolo** a **rettangolo** a **ottusangolo** e viceversa. Il triangolo **equilatero** invece può essere solo **acutangolo**, con i 3 angoli di **60 gradi** ciascuno. Compiendo tali trasformazioni e verbalizzandole gli alunni in breve tempo **capiscono e ragionano, consolidano** i concetti e sviluppano l'immaginazione, la creatività e la capacità di capire ed esprimere i concetti con i **simboli astratti**, ma pieni di **significato**.

TRIANGOLI

	<i>acutangoli</i>	<i>rettangoli</i>	
<i>ottusangoli</i>			
<i>scaleni</i>		 	
<i>isosceli</i>			
<i>equilateri</i>			

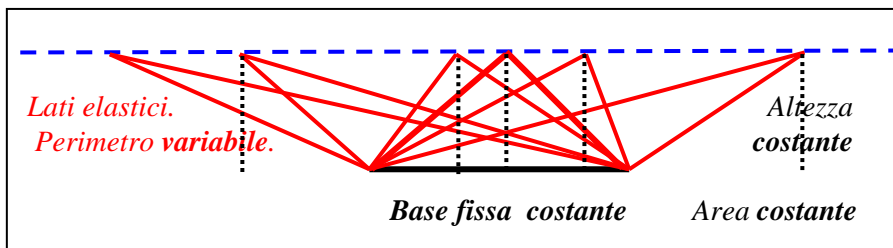
Emma Castelnuovo scrive:

*“Un dispositivo suggerito da una relazione di **Franca Conforto** (seconda media, 1954/’55).*

*Avevo dato, allo scopo di riprendere questioni di equivalenza trattate nell’anno precedente, da stendere una relazione sul tema: “**Quanti triangoli ci sono che hanno la stessa area? Disegnatene alcuni. Parlate, se credete, anche del perimetro**”.*

*Molti disegnarono tanti triangoli aventi uguale base ed uguale altezza, ecc..... Voglio parlare della relazione di **Franca Conforto**. Ecco il disegno che si trova nel suo quaderno ed ecco quanto scrive:*

*“Esistono **infiniti triangoli** che hanno la stessa base e la stessa altezza; hanno tutti la stessa area. Formano come **una striscia**: basta, per vederli, fissare una base e **spostare il vertice** opposto su una retta parallela alla base. Ma io potrei raddoppiare la base e allora dovrei dimezzare l’altezza, oppure triplicare la base e rendere l’altezza un terzo, oppure.... Avrei così **infinite strisce** di triangoli equivalenti.*



*E’ bello pensare a queste strisce di triangoli equivalenti: sono **infinite le strisce** che posso immaginare e in ogni striscia vi sono **infiniti triangoli** con ugual base ed uguale altezza.*

*Vi è dunque un **infinito più infinito**. Si capisce subito che i **perimetri** variano e che, allontanandosi il vertice, da una parte e dall’altra, il perimetro aumenta; è evidente che **il triangolo isoscele** che sta **in mezzo** avrà il **perimetro minimo**.*

In ogni striscia, dunque, il triangolo isoscele realizza il minimo perimetro; ma ci sono infinite strisce e allora vedo infiniti triangoli isosceli minimi ognuno appartenente ad una striscia.

*Ma, fra questi infiniti triangoli isosceli ce ne sarà uno che avrà il **perimetro più piccolo** degli altri isosceli.*

*E' evidente che sarà il **triangolo equilatero**.*"

*Così termina la relazione di **Franca Conforto**. Questa relazione letta in classe, (ogni allievo legge quanto ha scritto), colpisce i compagni, soprattutto perché pone un problema: perché il **triangolo equilatero** avrà il **perimetro minimo** tra gli isosceli? Come si può dimostrare? C'è allora chi si vale di un ragionamento "**al limite**":*

*"Se io immagino di continuare a **raddoppiare l'altezza**,- dice **Roberto Ago**, -dimezzando contemporaneamente la base, e facendo sì che il triangolo risulti sempre isoscele, "al limite" si avrà un triangolo isoscele con **i lati uguali** che tendono **all'infinito** mentre la base diventerà sempre più piccola; allora il perimetro del triangolo tende a diventare infinitamente grande. Ecc....*

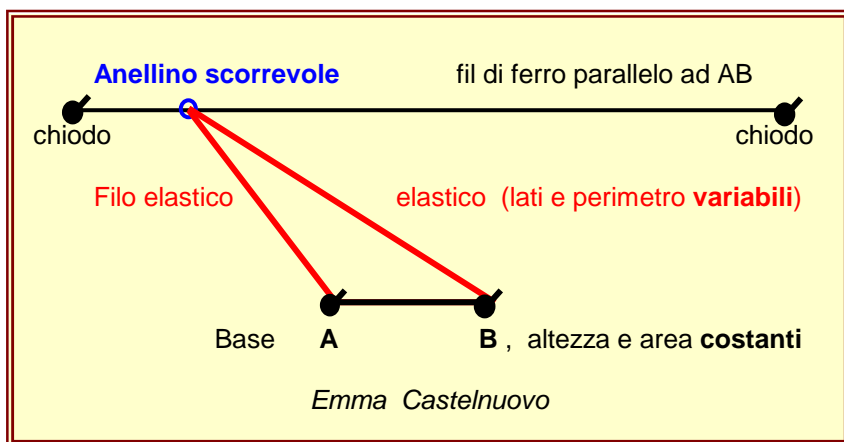
*La dimostrazione intuitiva di **Roberto Ago** viene precisata da **Franca Conforto** calcolando col teorema di Pitagora il perimetro del triangolo equilatero e il perimetro di vari triangoli isosceli costruiti dal compagno.*

*Quella **lezione** è stata veramente **vivacissima**; ma forse chi ha avuto il frutto migliore sono stata io: le osservazioni della bambina Conforto mi hanno suggerito di **realizzare materialmente** una striscia di triangoli aventi uguale base ed uguale altezza.*

Ho fissato su una **tavoletta di legno** due chiodi, **A e B** ad una certa distanza, disponendoli in modo che il **segmento AB** risultasse parallelo al lato lungo della tavoletta; poi, parallelamente al segmento AB, ho teso, a una certa altezza, un **fil di ferro** leggermente sollevato dalla **tavoletta**.

Un **anellino** abbracciava il fil di ferro, e, dentro l'anello passava un **filo elastico** i cui estremi erano **fissati ad A e B**.

Spostando l'anello, il filo elastico realizza **tanti triangoli di ugual base ed uguale altezza**; e la cosa espressiva è che, se si sposta l'anello ad una estremità e poi si lascia andare, il triangolo tende a portarsi **nella posizione di isoscele**, in quella posizione, cioè, in cui la tensione dell'elastico è **minima**. Si ha così la **prova meccanica del minimo perimetro del triangolo isoscele**".



E' possibile visualizzare la striscia di triangoli equivalenti anche usando per **base un'asticciola rigida** fissandoci un **elastico alle due estremità**: basta poi afferrarlo al centro, tenderlo ad una certa altezza e spostare il vertice a destra e sinistra mantenendo costante l'altezza.

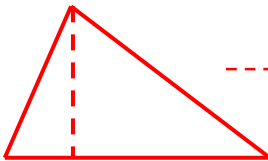
Equicomposizione ed equivalenza delle superfici

Come si afferma nella rivista “*L’insegnamento della matematica...*”, “*Occorre ricavare da esperienze dirette la formula per calcolare l’area del rettangolo, comprendendo che l’espressione **base x altezza** non indica il prodotto di 2 misure lineari, ma l’iterazione del numero dei **quadrati unitari** appoggiati sulla base, per l’altezza.*” Per le altre figure se ne può dimostrare l’equiestensione e l’equivalenza o a un **rettangolo** o a **metà** di un rettangolo di una stessa base ed altezza. Per evitare confusioni si possono ritagliare le diverse figure su cartoncino di **colori diversi**.

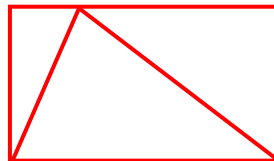
Ad esempio i **triangoli rossi**

Unendo 2 **triangoli rettangoli** uguali si può costruire il rettangolo doppio avente per base un **cateto** e per altezza **l’altro**.

Con 2 triangoli **scaleni** uguali, (**rossi**), se ne taglia uno lungo l’altezza, ottenendo 2 triangoli rettangoli, che, ruotati ed uniti all’altro triangolo scaleno intero, formano un rettangolo doppio di esso avente la stessa base e la stessa altezza. Da cui la formula $Area = base \text{ per } altezza \text{ diviso } 2$. E le formule inverse



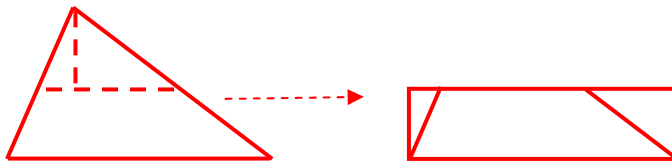
Tagliato lungo l’altezza



per formare rettangolo doppio con stessa base e stessa altezza

Si può anche tagliare un triangolo parallelamente alla base, a **metà** dell’altezza, ottenendo un trapezio sotto e un triangolo sopra; poi tagliare questo lungo l’altezza suddividendolo in 2 triangoli rettangoli, che, ruotati in basso formano col trapezio un rettangolo equicomposto ed equivalente al triangolo iniziale, con la stessa base e **metà** altezza.

Da cui la formula $Area = base \text{ per } mezza \text{ altezza}$.



Tagliato lungo i tratteggi

per formare rettangolo equicomposto con stessa base e metà altezza.

Si possono costruire **2 trapezi** isosceli uguali, **azzurri**. Stacciamo da entrambi un triangolino rettangolo tagliandoli lungo le **2 linee tratteggiate** (altezza), come da figura.

Otteniamo **2 trapezi rettangoli** uguali, che, uniti per il lato obliquo, formano un **rettangolo doppio** di ciascuno di essi, avente la **stessa altezza** e per base la **somma delle 2 basi** (o dei **2 lati paralleli**) del trapezio rettangolo. Unendo, poi, ad un trapezio isoscele, da una parte il trapezio rettangolo, e dall'altra il triangolino rettangolo, si ottiene un rettangolo doppio del trapezio isoscele, con la **stessa altezza** e con la base uguale alla **somma delle 2 basi** (o dei **2 lati paralleli**) del trapezio.

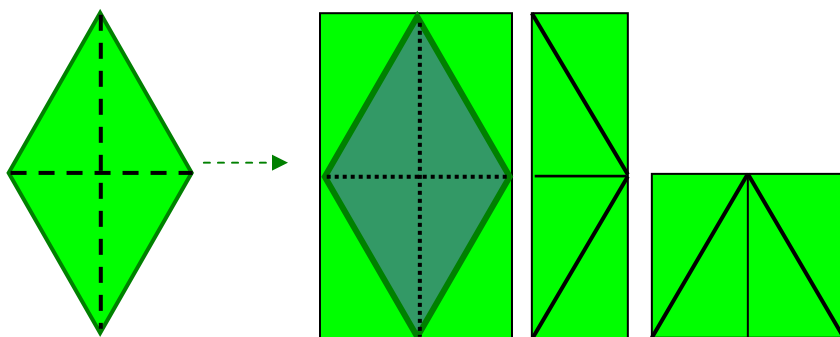


Tagliati lungo le 2 altezze

per formare rettangolo equicomposto con base = somma 2 basi trapezio e stessa h

Per il **romboide** si usano gli **stessi pezzi del trapezio**, dimostrandone l'equivalenza ad un rettangolo di uguale base ed uguale altezza.

Con **2 rombi verdi**, se ne taglia uno lungo le diagonali, ottenendo **4 triangolini rettangoli** uguali, che, uniti al rombo intero formano un **rettangolo doppio** del rombo avente per **base** una **diagonale** e per **altezza** l'**altra** diagonale del rombo. Oppure si possono formare **2 rettangoli equicomposti** aventi una dimensione **uguale** a una **diagonale** del rombo e l'**altra** dimensione uguale alla **metà** dell'**altra** diagonale del rombo.



Tagliato lungo le diagonali per formare rettangolo doppio del rombo, oppure 2 rettangoli equicomposti.

Costruzione e uso del sussidio

Si può facilmente costruire tale sussidio **per tutti gli alunni**, disegnando i pezzi necessari su una **striscia-matrice** di cartoncino bristol di un certo **colore per i triangoli**; su un'altra striscia di colore **diverso per i trapezi** e su un'altra striscia di un **altro colore per i rombi**, facendo poi tagliare con **la taglierina** in qualche tipografia o "centro copie" i pezzi necessari, sovrapponendo la **striscia-matrice** a tante **altre strisce uguali** a seconda dei pezzi necessari. Poi si possono consegnare a ciascun alunno i pezzi necessari, racchiusi in una busta. E' importante che tutti gli alunni facciano **essi stessi** le varie trasformazioni, possibilmente cercando di fargliele **scoprire**, e poi esercitandosi per **consolidarle**.

Costruire, operare, animare col computer

*Se ascolto dimentico, se vedo ricordo, se **faccio imparo**.*

*(Faccio = “agisco”, anche e soprattutto cognitivamente:
“**agis-co-gito**”)*

Spesso per spiegare i concetti già visti si usa il disegno, pensando che possa sostituire la manipolazione concreta: la quale è molto più efficace, come dicono Piaget, la Castelnuovo e tanti altri, e, se usata bene, costituisce un potente **trampolino di lancio** per la concettualizzazione, l’astrazione, la comprensione e l’uso significativo dei simboli astratti.

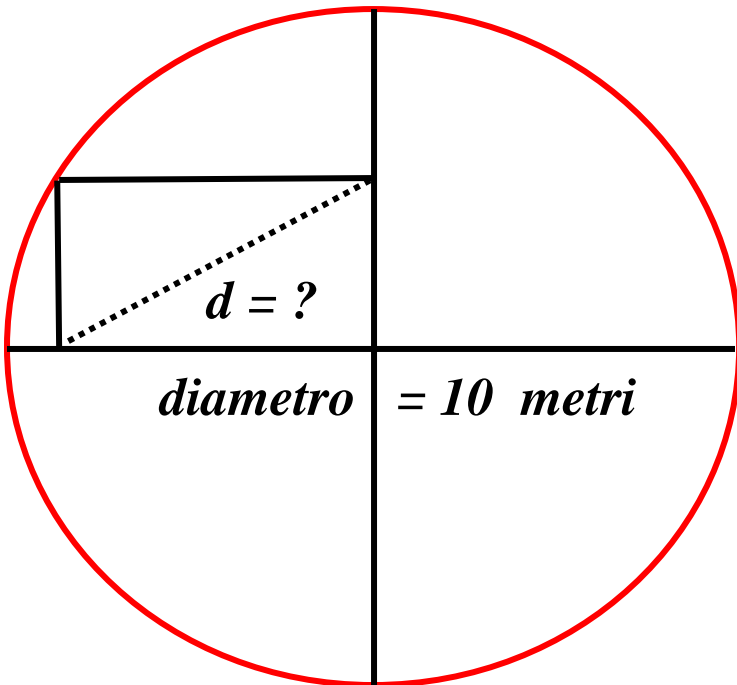
Anche il disegno, tuttavia, se usato bene, e specialmente se fatto dagli alunni stessi e non solo osservato, può essere molto efficace. Molte **animazioni** con materiali concreti e/o lucidi, si possono proiettare con la **lavagna luminosa**, anche dagli alunni stessi, per ottimizzarne la partecipazione e l’attenzione.

Molto efficaci e suggestive sono poi le **animazioni al computer**, con vari programmi, tra cui il CABRI. Alcune animazioni sono contenute anche in questo file, nelle ultime pagine.

Le animazioni consentono di visualizzare facilmente le varie figure geometriche in **tutte le posizioni** possibili per evitare che i **concetti geometrici** vengano erroneamente condizionati da posizioni rigide delle figure stesse, come può accadere con il disegno statico, rischiando il formarsi di alcune “**misconcezioni**” alquanto frequenti.

PROBLEMA DI KOHLER
Gestalt : psicologia della *forma*

Il diametro di un cerchio **misura 10 metri**.
Quanto misura la **diagonale *d*** tratteggiata del rettangolo
iscritto nel quadrante del cerchio ?



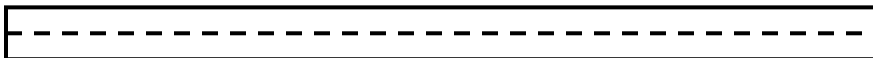
SOLUZIONE

La soluzione è intuitiva per *insight*: la *diagonale d* tratteggiata è uguale al *raggio*, che coincide con l'*altra diagonale*, e perciò misura 5 metri.

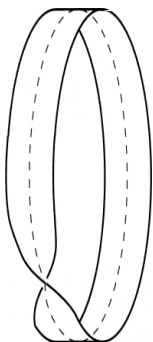
L'ANELLO DI MÖBIUS

Studiato dal matematico tedesco **Möbius** (pronuncia Moebius)

Preparo una striscia **di carta** larga 4 cm e lunga 50 cm circa, e ci traccio una linea nel mezzo, per tutta la sua lunghezza.



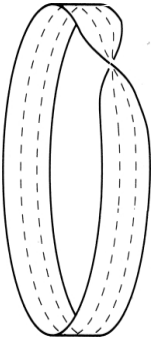
Poi incollo le due estremità, dando prima una **torsione di mezzo giro** (180 gradi) ad una estremità: si formerà così un anello come quello illustrato sotto, Tale anello non ha il dritto e il rovescio, e cioè 2 facce distinte, ma **una sola faccia**.



Se comincio a **colorarlo**, magari col verde, per poi colorare l'altra faccia col rosso, non ci riesco.

Se **taglio** l'anello lungo la linea tratteggiata, a **metà** della sua larghezza, non otterrò 2 anelli separati, ma un **solo anello**, lungo il doppio e con 2 torsioni!

Un'importante applicazione sono le **cinghie** usate in meccanica che si **consumano** così in modo **uniforme**, come le cinghie nelle macchine per la **trebbiatura**.



Suddivido ora la striscia in **3 terzi**, con 2 linee tratteggiate distanti un terzo della sua larghezza, e formo un altro anello di **Möbius**. Poi lo taglio lungo tale linea tratteggiata, a $1/3$ dai bordi: otterrò **2 anelli**, uno doppio dell'altro, ma concatenati **l'uno nell'altro!**

Il più piccolo è uguale all'originario, ma largo $1/3$; l'altro, anch'esso largo $1/3$, è lungo il doppio di quello originario e con una doppia torsione.

E se taglio l'anello di **Möbius** a **1 quarto** o a **1 quinto** dai bordi? Una cosa è certa: non si potrà **mai separare** da esso un **altro anello**.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Emma Castelnuovo, *“Didattica della matematica”*, La Nuova Italia
E. Valenti, *“La matematica nella nuova scuola elementare”*, Le Monnier.
E. Castelnuovo-M.Barra, *“Matematica nella realtà”*, Boringhieri
D.Corno-G. Pozzo, *“Mente, linguaggio, apprendimento”*, La Nuova Italia
Mussen-Conger-Kagan, *“Linguaggio e sviluppo cognitivo”*, Feltrinelli
Guido Petter, *“Psicologia e scuola primaria”*, Giunti
Mosconi-D'urso, *“La soluzione dei problemi”*, Giunti-Barbera '73.
Keith Devlin, *L'istinto matematico*, Raffaello Cortina '07
Hans Freudenthal, *“Ripensando l'educazione matematica”*, La Scuola '94.
Robert Ghattas, *“Insalate di matematica”*, Sironi
AAVV, *“E' importante la consapevolezza nell'apprendimento?”*,
L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate”,
Centro ricerche didattiche U. Morin, vol. 31/A n° 4, luglio '08)

ANIMAZIONE AL COMPUTER E ALLA L.I.M
CON IL PROGRAMMA WORD

*La sezione con l'animazione al **computer e alla L.I.M** omessa in questo file
si trova nello stesso file completo
disponibile nel sito www.monachesi.it da cui si può scaricare liberamente*