N U M E R I   E   O P E R A Z I O N I

di Ennio Monachesi

*Sito **www.monachesi.it***

Nel 1980 lo scrivente, da maestro diventò direttore didattico e fece riverniciare dalle “bidelle” dei **vecchi pallottolieri giganti**, quasi rottamati, con dieci decine a **cinquine bianche e nere,** consigliandoli alle maestre, con loro sorpresa e qualche risolino ironico. Salvo poi a ricredersi costatandone l’efficacia.

Come era successo anche a me in una classe prima e seconda, in cui avevo fatto usare agli alunni un **pallottoliere individuale** con le cinquine di colore diverso, per i **calcoli mentali,** fatti spesso e sistematicamente, con **grandi progressi**, che avevano reso facilissima sia la scrittura che il calcolo in colonna introdotto soltanto in classe seconda, a marzo. Anche i **genitori** erano rimasti **stupìti** degli straordinari e facili progressi dei loro figli nel calcolo.

In anni scolastici precedenti, tuttavia, avevo anch’io fatto usare altri sussidi, con basi anche diverse ed avevo costruito e brevettato un grosso e curioso “***Abaco-pallottoliere multibase***”, di legno, che mi portai **a Roma** agli **orali del concorso direttivo** del ’78, come esperienza significativa, prevista dal bando: ma **gli uscieri** non volevano **farmi passare** ritenendolo un **corpo contundente** contro la **commissione!** E qualcuno se lo meritava pure.

Dopo molti anni finalmente **Camillo Bortolato** propone con giusto successo un approccio analogo, con la “***linea del 20***”, privilegiando il **calcolo mentale** e la **comprensione-verbalizzazione** dei numeri, facilitando molto così anche la loro scrittura e il calcolo in colonna.

Come già detto, avevo già attuato anch’io tale approccio, molto efficace, in una classe prima e seconda molto numerosa, in cui dovevo badare all’**essenziale**, cioè al **concetto** dei numeri e al **calcolo mentale,** rappresentati con un pallottoliere a cinquine di colore diverso, in modo **intuitivo**, senza preoccuparmi troppo della loro scrittura e del calcolo in colonna. Che poi furono molto facili, grazie ad un approccio **semplice e naturale** che mi sembra si stia finalmente affermando, dopo lunghi anni di “***effetto Dienes***”, con i numeri in colore, e di “***insiemistificazione***”, come dice il matematico **Bruno De Finetti.** Anche se non si può fare di ogni **erba** un **fascio** e buttare via con **l’acqua sporca** anche il **bambino.**

1 - NUMERI E SUSSIDI

La struttura decimale è indispensabile

Hans Freudenthal osserva: *"Il più immediato sintomo di un qualunque sistema di matematica è il suo modo di trattare il numero naturale; più spesso il suo* ***trascurare*** *la struttura della numerazione, cioè il* ***sistema decimale****. Nella* ***pratica*** *dei numeri, dalla più rudimentale alla più sofisticata, la* ***struttura decimale*** *è l'aspetto* ***dominante.*** *Questa* ***struttura è indispensabile,*** *dall'apprendimanto (puramente linguistico) dei nomi dei numeri, fino all'impiego efficiente di questi. Ma in* ***nessun sistema matematico*** *si fa la* ***minima menzione*** *di queste cose. Anzi, la matematica ad* ***alto livello*** *è stata oggettivizzata, e* ***spogliata*** *dei più rudimentali* ***elementi umani****, come le* ***dita****."*

L'approccio didattico qui presentato si fonda invece proprio sulla **struttura decimale,** ulteriormente articolata **in cinquine,** e **visualizzata concretamente,** prima di essere tradotta nella scrittura simbolica, che sarà tanto più facile quanto più si saranno **appresi e consolidati concettualmente i numeri** e il **calcolo mentale**, visualizzandoli e rappresentandoli con **sussidi adatti e verbalizzandoli oralmente**, anche **senza scriverli.**

Numeri subito

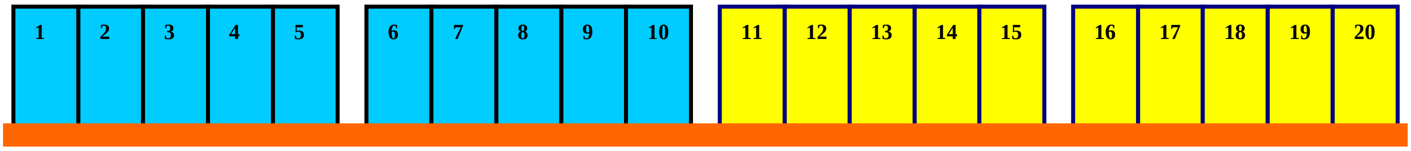
Nel "Progetto RICME" **Pellerey** scrive: *"****L'attività sul numero*** *avrà inizio* ***subito****;* ***l'aritmetica*** *resta il nucleo* ***centrale*** *in classe prima elementare."* A volte invece si rischia di annoiare gli alunni con troppe attività inutili o si crede che la **logica** sia un "prerequisito" dell'aritmetica. Invece **la logica** "*non è la* ***portinaia dell'aritmetica***", come dice **Pellerey** *("Scuola viva" n°8/'86),* ma semmai regge tutto l'edificio del pensiero.

Nel libro *"Il concetto di* ***numero*** *nella* ***scuola*** *e nella* ***vita*** *quotidiana",* **Noce e Missoni** costatano che la parola "**tre**", (concetto posseduto persino da alcuni animali), presenta la **stessa difficoltà** della parola "**buono**", e si chiedono: *"Ma allora, perché quando entriamo a scuola ci trattano come dei perfetti* ***idioti*** *rispetto alla* ***parola*** *"****tre****", e come degli* ***intellettuali*** *rispetto a "****buono*** *?"*

Forse perché ci si preoccupa troppo di come si **scrivono** i numeri, e così la matematica scolastica, come dice Camillo **Bortolato**, *"finisce per diventare la* ***religione*** *dei* ***numeri scritti****. Il* ***totem*** *è il* ***valore posizionale*** *e lo* ***zero*** *il suo* ***feticcio****."*

Invece i bambini capiscono e apprendono facilmente i numeri e il **calcolo mentale**, grazie alla loro rappresentazione con le **dita** o con sussidi dalla struttura **analoga**, in **cinquine** e **decine**.
Poi sarà molto più facile **scriverli** e fare calcoli in **colonna**.
Tutto ciò, in parte, si è sempre fatto, ma spesso in modo un po' generico, mentre invece si può fare molto meglio, con sussidi adatti, come quelli indicati nelle prossime pagine.

LA LINEA DEL 20



Camillo Bortolato *(Erikson)*

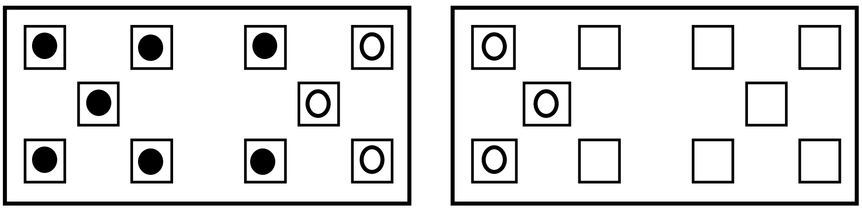
Come scrive **Bortolato**, la *"**linea** del **20** rappresenta la **reintro-duzione** della **semplicità** e della **naturalezza** nel modo di apprendere. Imparare con essa è **facilissimo**, quasi immediato, e l'intero percorso di apprendimento del calcolo dura appena qualche settimana."*

La "***Linea del 20***" è formata da 20 tasti mobili numerati, disposti in **4 cinquine** separate, evidenziando ciascuna **decina** con un colore diverso.
Ci si può operare **alzando e abbassando** i tasti, per formare, comporre e scomporre i numeri, e per visualizzare il **calcolo mentale**, per "***calcolare senza contare***", come dice Bortolato, in tempi molto brevi. I bambini con tale sussidio imparano e consolidano facilmente i numeri e il **calcolo mentale** in modo intuitivo, "**analogico**", come avviene con le dita delle mani, senza tante spiegazioni concettuali per la loro scrittura e per il calcolo in **colonna**, che Bortolato definisce "**cieco**", cioè meccanico, osservando giustamente che: *"Il **calcolo scritto (in colonna)** è un paragrafo circoscritto del calcolo mentale, e non il contrario, poiché anche **nel calcolo scritto** (in colonna) applichiamo, colonna per colonna, le strategie del **calcolo mentale**."* Che perciò va appreso molto bene.

L'importanza di quanto dice Bortolato, quindi, non sta tanto o soltanto nel **sussidio in sé**, ma anche e soprattutto negli **obiettivi** ai quali esso è **finalizzato**, che ritengo si possano raggiungere anche con altri sussidi analoghi, soprattutto col **pallottoliere** a cinquine diverse. Bortolato osserva che la "***linea dei numeri***", "*configurata come una retta frammentata da barrette con sotto i numeri*" può disorientare i bambini, e che i "***numeri in colore***", sono "*una rappresentazione **astratta e unilaterale***" della quantità **cardinale**. Tuttavia penso che la **linea** dei numeri, ed anche il **calendario** e altre rappresentazioni, se usate bene, possano essere utili per **completare** e approfondire il concetto di numero.

Bortolato ha pubblicato anche la "***Linea del 100***" per visualizzare e rappresentare con immediatezza i numeri, le tabelline e il calcolo mentale fino a 100 grazie alla struttura in decine e cinquine, come nel pallottoliere e negli altri **sussidi analoghi** qui presentati.

SCHEDE DEL 10



7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 10 + 3 = 13 *13 – 6 = 13 –3 –3 = 10 – 3 = 7*

Jacqueline Bickel, nel libro "***L'educazione formativa***", osserva che la struttura in **cinquine e decine** consente di cogliere rapidamente le quantità, facilitando molto l'apprendimento dei **numeri** e il **calcolo mentale**. Nelle schede che propone si può **operare** concretamente con gettoni **colorati** o anche senza, solo osservando le caselle delle schede stesse.

TABELLA DEI NUMERI da **1 a 100**

(Progetto RICME, vol. III, pag. 106)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**

Si può usare la **tabella** per fare e visualizzare addizioni, sottrazioni, scomposizioni e altri esercizi. Esempio

27 = 10 + 6 + 4 + 5 + 2 = 16 + 4 + 7 ecc..
25 + 7 = 25 + 5 + 2 = 32
16 – 9 = 16 – 6 – 3 = 10 – 3 = 7
35 – 28 = **2 + 5 = 7** *(Da **aggiungere** a **28** per arrivare **a 35**)*

Si può calcolare **operando** sulla **tabella** con dei **gettoni** di 2 o più **colori**, o **dischetti** di cartoncino usati per chiudere le cartucce dei fucili, reperibili in armeria, o anche **senza**, osservando ed evidenziando in modo adeguato le varie quantità di caselle e calcolando **mentalmente**. All'inizio gli alunni vanno **guidati** concretamente dall'insegnante, anche senza scrivere, ma verbalizzando **oralmente**.

Ad es. per fare 13 **=** 6 + 4 + 3, si possono indicare le 13 caselle totali e poi gli altri numeri di caselle (6, 4, 3) in cui si può **scomporre 13.**

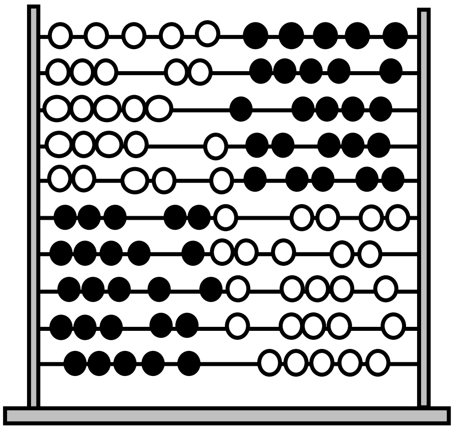
Se voglio fare **45 – 17**, prima indico 45 caselle; poi 10 caselle che tolgo e arrivo a 35; poi altre 5 indicando 30 e poi altre 2 indicando 28.

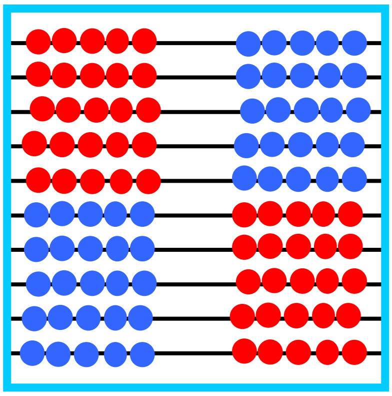
E per fare **23 – 18**, indico 23 caselle, poi le **prime 18** che **tolgo**, vedendo che ne restano **2 + 3 = 5** per arrivare a 23.

Tutti o parte dei quadratini-casella possono essere anche **senza numeri**, da far scrivere eventualmente agli alunni.

Si possono usare diverse **tabelle** per più calcoli ed esercizi diversi, stampandole su cartoncino con un adeguato ingrandimento.

PALLOTTOLIERE CON **CINQUINE** DI COLORE **DIVERSO**





Come **sussidio individuale** il pallottoliere si trovava in **scatoline** di plastica, ma con le decine di un solo colore. Le **palline però** si potevano **sfilare** dalle asticciole estraibili, **spostandole** e formando tutte decine con ***2 cinquine*** *di colore* ***diverso***, per poter cogliere a **colpo d'occhio** i **numeri** e facilitare il **calcolo mentale.** Ora si trova in altri formati anche su internet, scrivendo "*pallottoliere*", e cliccando su "***cerca.***" La struttura della **tabella** dei numeri da 1 a **100** corrisponde a quella del **pallottoliere**, che, se **usato bene,** può essere molto utile perché consente di **visualizzare** i numeri e **calcolare** con riferimento costante **a 5** e a **10** e al passaggio della ***decina.***

All'inizio gli alunni vanno **guidati concretamente** dall'insegnante, anche senza scrivere, ma verbalizzando **oralmente**: in poco tempo si possono ottenere **ottimi risultati,** e sarà poi molto facile **scrivere** i numeri già capiti e padroneggiati a livello concettuale e operativo. Anche i concetti di ***decina*** *e* ***centinaio*** risulteranno così facili ed intuitivi rendendo anche facile capire, senza troppe spiegazioni, la scrittura con le cifre e lo zero, con l'eventuale uso **dell'abaco**, che però**,** se si è lavorato bene nel modo indicato, diventa quasi superfluo. Le cifre delle decine e delle centinaia si possono anche scrivere con colori diversi, *sebbene* ***non sia il colore ma la posizione*** *delle cifre a determinarne il* ***valore.***

Per fare la **scomposizione** si evidenziano i **gruppi separati** in cui si scompone un numero.
Ad es. **18** = 5 + 5 + 8 = 3 + 5 + 2 + 3 + 5 = 4 + 6 + + 4 + 4 ecc.

Per farci le operazioni, all'inizio le **biglie-unità** si spostano **tutte a destra**.
Poi, per **addizionarle,** si portano a **sinistra** le quantità indicate dagli addendi.
Ad es. per fare **6 più 3,** prima sposto tutte le biglie a **destra**; poi ne prendo 6 e le porto a sinistra; quindi ne prendo altre 3 e le aggiungo alle prime 6, a sinistra, **ottenendo 9,** visualizzato come **5 + 4.**

Per fare **15 più 8**, prima sposto tutte le biglie a **destra**; poi prendo ***1 decina*** e **5 unità** e le porto a sinistra; poi altre **5 unità** completando ***2 decine***, ed infine altre **3 unità,** ottenendo ***2 decine*** **e 3 unità,** cioè **23**

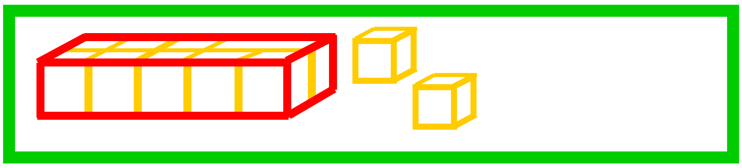
Per fare **10 meno 3**, prima sposto tutte le biglie a destra; poi prendo **1 decina** di palline e le porto a sinistra; poi tolgo **3 palline** spostandole a destra e vedo che a sinistra ne restano **7**.

Per fare **25 meno 7,** prima sposto tutte le biglie a destra; poi prendo **2 decine** e **5 unità** e le porto a sinistra; poi tolgo **5 palline** e poi altre **2 palline**, spostandole a destra, e vedo che a sinistra restano ***1 decina*** di palline e **8 palline-unità.**

In tal modo gli alunni evidenziano e **verbalizzano** sempre sia ***le decine*** che le **unità** e il ***passaggio*** della **decina**, fondamentale per il **calcolo mentale**, interiorizzando facilmente i **numeri** e le procedure del **calcolo mentale** eseguito con i **sussidi concreti**, di cui potranno fare **a meno** tanto prima quanto più li avranno usati, come potenti **trampolini** di lancio per capire e usare bene anche i **simboli astratti.**

IL CONTAFACILE

(Di Maria Pia Rinaldelli Saitta: San Severino, Macerata: 0733-639278)



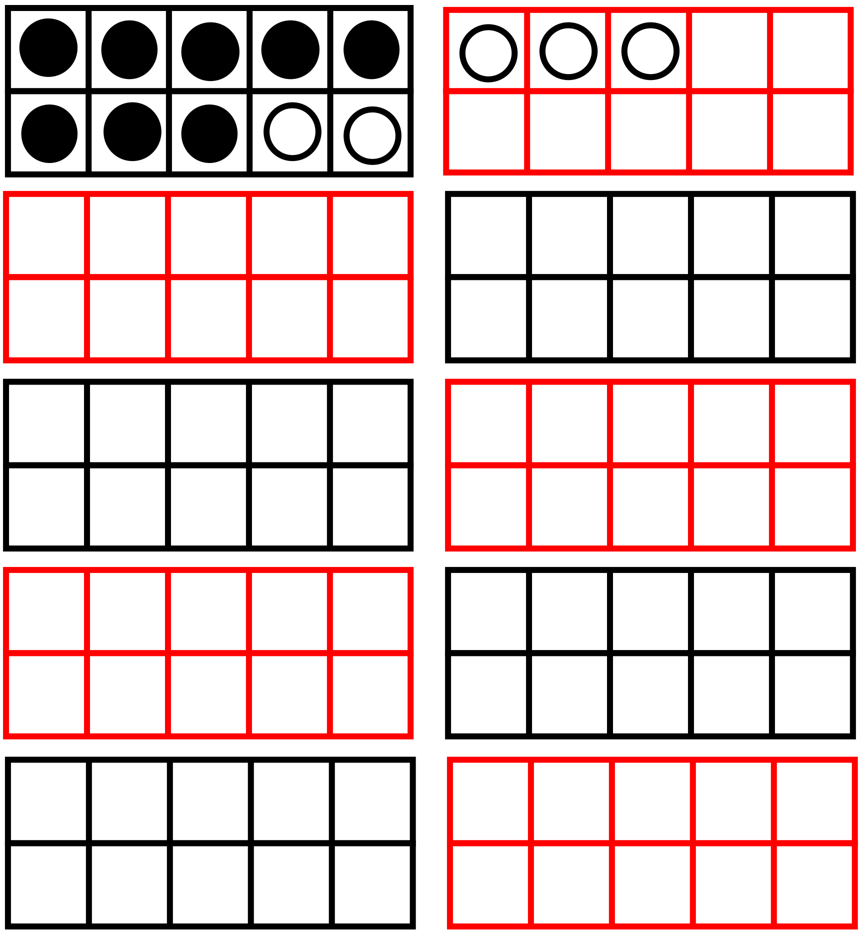
*(**Parte operativa** del sussidio, il quale comprende anche le cifre mobili)*

Il contafacile si compone, per la **parte operativa**, che è la più **importante,** di ***10 scatoline-decine rosse*** contenenti *10 cubetti-unità gialli* ciascuna, racchiuse in una *scatola-centinaio verde,* con cui si può **calcolare concretamente**. Sia i ***cubetti-unità*** che le ***scatole-decine,*** sono disposti in **cinquine**, 5 a destra e 5 a sinistra. L'autrice, prof. di matematica, l'ha ideato per **figlio di 5 anni** restandone **entusiasta.** L'ha poi anche brevettato e costruito.

Se ne può realizzare una **versione semplificata**, usando, al posto delle **scatole-decina**, altrettante **schede-decina,** 5 a destra e 5 a sinistra, operandoci con i gettoni o **dischetti colorati** al posto dei **dadi**, per fare composizioni e scomposizioni, addizioni e sottrazioni.

Es. $13 = 10 + 3 = 3 + 10 = 5 + 5 + 3 = 5 + 3 + 5 = 8 + 2 + 3 = 8 + 5$

I 3 dischetti **bianchi** si possono aggiungere nella **scheda sotto** invece che in quella a destra.
Si può anche fare a meno dei **gettoni**, osservando ed evidenziando le varie quantità di caselle.



"*Subitizzare*" la quantità senza contare grazie alla struttura in cinquine e decine

Anche **Michele Pellerey** parla del "*Senso del numero*", comune anche ai **corvi**, fino a 4, e della "***Subitizzazione***": *"Alcuni studiosi hanno riscontrato che i bambini da loro esaminati erano in grado di "**subitizzare**" la quantità per insiemi formati al massimo da **6 punti** disposti casualmente."*

Perciò è abbastanza facile "***subitizzare***", o comunque cogliere a colpo d'occhio, quantità **fino a 5**; e rappresentarsi gli altri numeri **fino a 10** come composti da cinquine e unità e poi da decine e unità, come già visto in tutti gli esempi già fatti. Si possono poi consolidare facilmente tutte le composizioni dei numeri entro il 10 ed entro il 20, fino a **non dover più contare**, come esemplificato più avanti, *"Tabelline" di addizioni e sottrazioni entro il 10 ed il 20."*

Pellerey osserva che gli **schemi** percettivi, trascurati da **Piaget** perché **statici**, sono invece molto efficaci per apprendere i numeri: *"Recenti tentativi sembrano infatti evidenziare che è possibile **per questa strada** sviluppare il concetto e la padronanza del numero fino a **livelli prima impensabili** in bambini cerebrolesi o deboli mentali."* *(Progetto RICME, vol. III, pag. 13-19)*

Un fecondo connubio

Il giovane Petter sostiene lo stesso approccio in un suo libretto **"Conversazioni psicologiche con gli insegnanti",** nella edizione del **'68**, in seguito parzialmente modificato e complicato alla luce dell'insiemistica. In tale libretto egli propone una ***"base percettiva omogenea"***, costituita da tutte **strisce** di cartoncino, da 10 quadratini-unità (le ***decine***), da cinque quadratini-unità (le ***cinquine***) e da *5 + 1 = 6*; *5 + 2 = 7*; *5 + 3 = 8* e *5 + 4 = 9* quadratini, per poterci visualizzare, comporre-scomporre, addizionare e sottrarre tutti i numeri da 0 a 10, e da 10 a 100, con riferimento ***strutturale al 5** e al **10***, e poi al **100** e al **1000**, visualizzando così in modo efficace e interiorizzando mentalmente una **struttura** dei numeri in ***cinquine e decine***, ***centinaia*** , ***migliaia*** ecc..
Petter afferma: *"Questa **base percettiva omogenea** permette di cogliere, oltre che la **struttura** dei singoli **numeri**, anche la **struttura** di tutta la **serie numerica.*** (Che però è **infinita** e non ha **nessuna struttura**: siamo noi che **gliela diamo**, anche ai singoli numeri, con i materiali descritti: nota dello scrivente). *Secondo la **Stern,** essa costituisce poi la **base quasi-visiva** per un facile **calcolo mentale** anche quando non si fa più ricorso al disegno o ai sussidi concreti".*

La "***base percettiva omogenea***" di Petter corrisponde, nel principio e nella struttura, sia al **pallottoliere** con cinquine di colore diverso, sia al **contafacile**, alla "**linea** del **20**" e alle **schede** del 10. In tali sussidi gli elementi-unità sono sempre disposti in **strutture** ordinate secondo i principi della **Gestalt**, o psicologia della forma.

Gli stessi elementi inoltre si possono **manipolare**, come dice **Piaget**, che ha evidenziato l'importanza di costruire e rappresentare **operativamente** i numeri e le operazioni, *"con **processi operativi** che fanno capo ad una trasformazione del reale, con le **azioni** o **mentalmente**".*

(Piaget: " Psicologia e pedagogia")

In tal modo si può realizzare un approccio **integrato-sinergico**, che **ottimizza** l'efficacia didattica, mediante un fecondo **connubio** della struttura percettiva **gestaltica** con l'operazionismo **piagetiano.**

(Vedi schema alla prossima pagina)

Un approccio integrato sinergico

L'approccio al numero e al calcolo mentale qui presentato è stato applicato con ottimi risultati.
Esso si basa su **2 principi** fondamentali della psicologia dell'apprendimento:
il **costruzionismo** di **Piaget** e lo **strutturalismo** della **Gestalt** o "psicologia della forma".

Questa da molta importanza alle **strutture percettive.**

Piaget evidenzia invece che le operazioni sono **processi attivi**, e i bambini li apprendono **operando**, prima con le **azioni** poi **mentalmente**, mentre le immagini e le **strutture** percettive **già fatte** sono **statiche** e passivizzanti. *(Vedi pag. 12)*

Ma se **l'ordine** statico delle strutture gestaltiche si dinamizza con **l'operatività**, si ottiene il massimo, **innestando** il dinamismo **operatorio** sui materiali **strutturati**, con un fecondo connubio e un approccio **integrato-sinergico**, rappresentato nello schema sottostante, che ovviamente è **teorico**, e perciò **astratto**, schematico e riduttivo, e sicuramente semplicistico rispetto alla realtà, molto più ricca e sfumata, variegata e complessa. Ma può aiutarci a riflettere.

COSTRUTTIVISMO

"Se **ascolto** dimentico, se **vedo** ricordo, se **faccio** imparo"
*(Faccio = **"agisco",** anche e soprattutto cognitivamente: "**agis-co-gito**")*

attivismo confuso | ***costruttivismo ordinato***

P
I

CONFUSIONE **G E S T A L T** *(strutture)* *ORDINE*

G
E
T

passività confusa | *passività ordinata*

PASSIVITA' (nozionismo mnemonico)

E i numeri in colore?

Ritengo che i “**numeri in colore”** siano **meno efficaci** dei sussidi qui considerati, perché, presi isolatamente, **non** fanno **vedere** le **quantità**, ma le **associano** a un **colore.**
Nel singolo regolo, infatti, **non si vedono** né le **unità,** né la **cinquina,** né la ***decina,*** che invece negli altri sussidi qui considerati sono ben visibili e costituiscono punti di riferimento costanti, molto importanti per capire i numeri e per il calcolo mentale.

Ad es. il regolo **nero** rappresenta il **7** come un tutto **unitario**, e questo è **importante**, e può e deve avvenire anche con gli altri sussidi, per “**subitizzare**” il numero, senza contare per uno. Ma nel regolo nero **non si vedono** né le **7** unità, né la **cinquina**, né la ***decina***, né le **3 unità** che mancano per fare **10**, che con i regoli in colore si devono ogni volta prendere e comporre.

Invece, con gli altri sussidi considerati, quando prendo il **7**, lo colgo **subito** sia come un **tutto**, sia come **5 + 2**, vedendo anche che **manca 3** per fare **10**, cioè ***una “decina”,*** rappresentata da ***una fila intera*** nel pallottoliere, da ***una scatolina*** nel contafacile, da ***una decina*** dello ***stesso colore*** nella **linea del 20**, da ***una scheda completa*** nelle **schede del 10**.

Diventa così chiaro e intuitivo anche il concetto di ***decina***, che se necessario si può consolidare e chiarire meglio con **l’uso dell’abaco** e il **cambio concreto** di dieci unità con ***1 decina***. La quale si può visualizzare anche con ***un sacchetto*** di 10 gettoni, o con ***un mazzetto*** di 10 stecchini, ecc. Se gli alunni hanno capito **bene il concetto,** la scrittura con con le **cifre** e lo **zero** è molto facile e intuitiva.

Piaget, parlando dei **numeri in colore**, segnala *“il rischio di far prevalere le **configurazioni** sulle **operazioni**, gli aspetti **figurativi** del pensiero (percezioni, imitazione e immagini) sugli aspetti **operativi** di esso (azioni e operazioni) ” (Jean Piaget, “Psicologia e pedagogia”).*

Tale rischio può riguardare anche gli altri sussidi quando si usano per “spiegare” agli alunni, e non invece per farli **operare attivamente,** non solo **a livello manuale,** ma anche e soprattutto a livello **cognitivo-mentale**, **verbalizzando** i concetti e le operazioni.
Come già detto, tuttavia, i regoli colorati possono essere utili per il concetto di numero come **misura.**

Sussidi diversi per evitare rigidità e fissazioni,
ma anche punti di riferimento stabili

Nelle “*Raccomandazioni*” del 2002, si legge: *“E’ meglio operare con **diversi materiali**, sia comuni che strutturati, per evitare **rigidità e fissazioni**”.*
Giusto, però bisogna anche evitare che l’uso di materiali e sussidi diversi, se sono troppi e usati disordinatamente, generino **confusione e disorientamento**.
Come dice anche Bortolato, infatti, è molto importante assicurare punti di riferimento **stabili** e significativi, usando sistematicamente e prioritariamente sussidi ed approcci efficaci, come quelli già visti, senza tuttavia escluderne altri, come la **linea dei numeri**, il **calendario**, ecc., per approfondire il concetto di numero.

Solo la base dieci

Come sottolinea **Jacqueline Bickel**, noi concettualizziamo e verbalizziamo i numeri in **base dieci.** La quale è certamente convenzionale, ma ciò non costituisce affatto un limite, anzi: essa è un **pilastro fondamentale** ed è già nota e **familiare** agli alunni nell'ambiente extrascolastico. Perciò giustamente le "Indicazioni" pongono tra gli obiettivi la scrittura dei numeri con la **sola base dieci.**

Nei Programmi '85 invece si accennava anche all'uso di altre basi, senza però attribuire loro molta importanza, come invece ha fatto qualche "esperto", (ad es. la Maricchiolo), con esagerazioni, proponendo non solo di scrivere i numeri, ma anche di eseguire **il calcolo in colonna,** in **basi diverse.** Ad es., con la **base tre,** si ha: **2 + 1 = tre, scrivo 0 unità e riporto una terzina!**
Mi sembra un **virtuosismo inutile**, frutto di una sorta di **libidine nuovistica**, introdotto in nome dell'innovazione. La quale è senz'altro importante, purché sia finalizzata bene, in **senso migliorativo**, curando **bene le cose essenziali,** come chiedono le "Indicazioni."

Si sostiene che usando basi diverse si fa molto **calcolo mentale**: che ritengo importantissimo, ma lo si può fare **di più e meglio** con la sola **base dieci.**
Così come con la sola **base dieci** si può capire benissimo il **valore posizionale** delle cifre.
Poi eventualmente, se ci sarà tempo, dalla classe terza in poi, si potrà anche fare qualche **facile esempio** con qualche **altra base**, ma solo a scopo informativo, senza insistere più di tanto.

2 - CALCOLO MENTALE CONCRETO E SCRITTO

*Eseguito-rappresentato con **sussidi concreti e scritto***

Il calcolo **mentale** si capisce e apprende tanto meglio quanto più viene **eseguito e visualizzato-rappresentato** concretamente con **sussidi** adatti ed anche **scritto,** nei modi già visti ed in altri.
Il calcolo **mentale interiorizzato** è un punto di **arrivo,** e non si deve mettere il carro davanti ai buoi.

Consolidare il calcolo mentale faciliterà moltissimo anche il calcolo **in colonna,** grazie alla velocizzazione dei calcoli mentali parziali entro il 20 che il calcolo in colonna richiede, oltre ovviamente alla padronanza delle tabelline della moltiplicazione.

Il calcolo **in colonna** si dovrebbe ridurre all'**indispensabile**, usando la calcolatrice per i calcoli complessi.

Al suo posto, però, bisogna **curare di più e meglio il calcolo "mentale",** ma non soltanto come calcolo "**orale**", fatto magari occasionalmente nei ritagli di tempo, lasciando che gli alunni trovino da soli le strategie di calcolo, come spesso avviene.
In tal modo infatti gli alunni meno capaci incontrano gravi difficoltà e imparano poco, mentre gli altri se la cavano anche discretamente, ma potrebbero fare molto meglio se fossero ben guidati.

Perciò, finché è necessario, bisogna aiutare e guidare gli alunni, sia facendogli eseguire e **visualizzare-rappresentare** il **calcolo "mentale"** concretamente con **sussidi adatti**, sia in parte facendoglielo anche **scrivere in riga.**
Infatti noi **interiorizziamo** ciò che **facciamo** spesso concretamente, e/o **scriviamo.**

Una volta chiesi a un alunno di classe terza con buone capacità: -*Quanto fa **41 meno 39**?*
Dopo averci pensato un po' mi diede una risposta sbagliata.
Gli chiesi come aveva fatto e lui mi rispose: ***-Ho messo in colonna a mente.***
Se invece avesse eseguito più spesso esercizi con **sussidi concreti**, e **scrivendoli** anche "**in riga**", avrebbe ***"messo in riga a mente"*** e ***"operato a mente",*** interiorizzando quello che **faceva e scriveva.**

Una volta raggiunta una certa **autonomia**, poi, gli alunni potranno inventare essi stessi esercizi e operazioni, ed escogitare **strategie personali** di calcolo "mentale".
Tale **originalità** non è affatto ostacolata, come talvolta si pensa, dalla **guida** dell'insegnante: anzi, può esserne molto favorita, purché la guida sia efficace, intelligente e significativa.

“Tabelline” di addizioni e sottrazioni entro il 20

Per velocizzare i calcoli, e “***calcolare senza contare***”, come dice Bortolato, la composizione e le addizioni e sottrazioni dei numeri **entro** il **10** ed il **20** vanno apprese e memorizzate, a mo’ di **tabelline**, **senza contare per uno**, come da esempi.

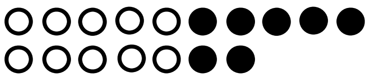
Per i numeri ***fino a 10*** *(esempio 7)*

5 + 2 = 7   7 – 2 = 5
2 + 5 = 7   7 – 5 = 2

4 + 3 = 7   7 – 3 = 4
3 + 4 = 7   7 – 4 = 3

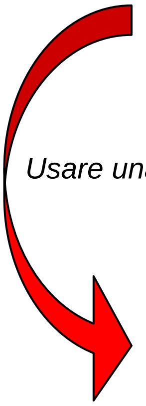
Ecc…fino a 6 + 1 = 7 e 7 + 0 = 7

Per tutti i numeri ***da 11 a 20*** *(esempio 17)*

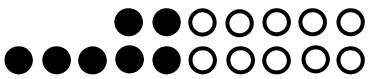


10 +
7 = 17

17 – 7 = 10



Usare una ***stessa illustrazione****, qui ripetuta,* ***capovolgendola****:*
10 + 7 = 17 sarà scritto capovolto a ***sinistra***
e 17 – 7 = 10 capovolto ***sopra.***



7 +
10 = 17

17 – 10 = 7

La morra non morrà

La morra è un **vecchio gioco,** che può essere utilizzato didatticamente.

Si gioca in 2, ad es. **Ugo** e **Ale**.

Ciascuno può “buttare” da **0 a 5 dita** con una mano, cercando di indovinare e **dicendo forte** tutti e due contemporaneamente, il **totale** che ciascuno dei due prevede che uscirà **sommando** le dita che stanno buttando. Chi indovina fa 1 punto.
Vince chi per primo raggiunge il punteggio stabilito: es. 5 punti.

Ad es. **Ugo** butta **3** dita dicendo forte: -**Otto**! come totale previsto.
E fa un punto solo se **Ale** butta **5** dita.

Mettiamo invece che **Ale** butti **2** dita: fa un punto solo se ha detto forte: -**Cinque**! come totale previsto (con le **3** dita buttate da Ugo). Altrimenti niente.

Il totale **massimo** è **10** (**morra**), se buttano tutti e **due 5**.
Il totale **minimo** è **zero** se buttano tutti e **due 0.**

Se un giocatore ad es. **butta 4** dita dicendo: -**Tre**!, sbaglia di sicuro.

E’ un gioco che richiede **prontezza** di **riflessi** e una **logica** ben precisa.

Infatti, se Ale ad es. dice **10** come **totale** deve buttare solo **5** sperando che anche l’altro butti **5**.
Se dice **9** come **totale** deve buttare solo **5** o **4** sperando che l’altro butti **4** o **5**.
Se dice **8** come **totale** deve buttare solo o **5** o **4** o **3**, ma non 2 e neanche 1 o 0.
Se dice **2** come **totale**, deve buttare solo o 2 o 1 o 0.
Se dice **0** come totale deve buttare solo **0**, sperando che anche l’altro butti **0**. Ecc….

Ci si può allenare anche da soli provando tutte le ipotetiche “buttate” possibili per ciascun totale.

E s e r c i z i   s i g n i f i c a t i v i

Si propongono 2 esercizi semplici ma efficaci da eseguire con l'uso di **sussidi concret**i, finchè necessario, prima con la **guida** dell' insegnante, poi lasciando che gli alunni ne **inventino** altri da soli, anche aiutandosi.

Scomposizioni

12 = 5 + 5 + 2 = 4 + 6 + 2 = 2 + 3 + 3 + 4 = ecc...
18 = 10 + 8 = 2 + 8 + 3 + 5 = 4 + 10 + 4 = ecc….
30 = 10 + 10 + 10 = 6 + 4 + 7 + 10 + 3 = ecc...
46 = 20 + 20 + 6 = 15 + 5 + 10 + 6 + 4 + 6 = ecc.

Numerazione

+ 5		**+ 10**	
7	20	51	56
12	17	61	49
17	14	71	
22	11	81	**+ 8**
27		91	
32	**+ 6**		57
		- 7	65
- 3	17		73
	23	84	81
29	29	77	89
26	35	70	97
23	41	63	ecc…

*Gli **operatori** (**+ 5** ; **– 3**, ecc…) introdotti a piacere, liberamente, vanno **evidenziati,** cerchiandoli, scrivendoli in rosso, ecc…*

Scrivete poco così non sbagliate

All'inizio **l'insegnante guida** gli alunni per **fargli capire concretamente** come si fa.
Poi gli alunni possono inventare essi stessi gli esercizi, lavorando anche in coppie ed aiutandosi, individualizzando e socializzando il lavoro e rendendolo molto piacevole ed efficace.
E gli alunni lavorano molto, e spesso continuano **spontaneamente anche a casa.**
Ovviamente saranno esercizi tutti diversi.
Qualcuno dirà: -Ma poi **chi li corregge**?
Zoi citava spesso quella simpatica maestra che diceva agli alunni: -Scrivete poco, così non sbagliate".
Non sarebbe possibile e non è necessario "correggere" puntualmente tanti esercizi tutti diversi. L'insegnante può invece seguire gli alunni mentre lavorano, **incoraggiandoli** ed **aiutando** chi ne avesse bisogno per metterli in condizione di **far bene**, dando poi magari anche un'occhiata complessiva al lavoro fatto e mettendo eventualmente un visto, un "Bene" ecc….

Esempi di calcolo mentale "scritto"

Da eseguire con **l'uso di sussidi concreti**, finché necessario.

Con le uguaglianze: statico

35 – 13 = 35 – 10 – 3 = 25 – 3 = 22

– 10 –3 *25*

$$16 \times 5 = \left.\begin{array}{r} 10 \times 5 = 50 \\ + \\ 6 \times 5 = 30 \end{array}\right\} = 80$$

13 + 25 = 10 + 20 + 3 + 5 = 30 + 8 = 38

10 + 3 *20 + 5* *30* + *8*

Con frecce-operatori (rossi): *dinamico, reversibile, più intuitivo.*

$$\begin{tikzcd} 6 \arrow[r, "+4"] \arrow[rr, bend left, "+8"] & 10 \arrow[r, "+4"] & 14 \arrow[ll, bend left, "-8"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 35 \arrow[r, "-5"] \arrow[rr, bend right, "-11"'] & 30 \arrow[r, "-6"] & 24 \arrow[ll, bend right, "+11"'] \end{tikzcd}$$

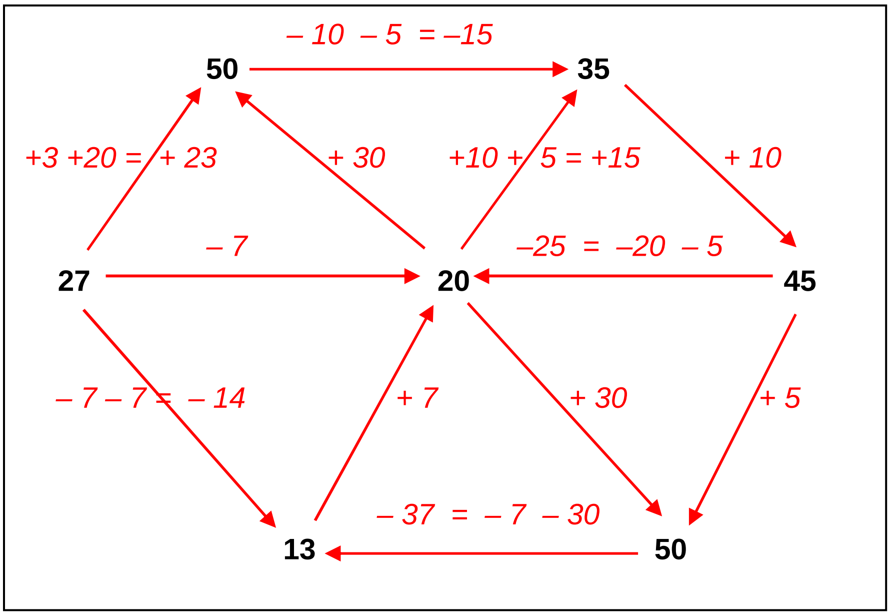
+ 2

41 meno 39 = 2

R A G N A T E L E

*Prima scrivere i **numeri grossi neri**.*

*Poi collegarli con **frecce-operatori rossi.***



Una volta capito, con la **guida concreta dell'insegnante**, gli alunni possono continuare da soli, anche aiutandosi, **inventando** altri esercizi e usando **sussidi concreti**, se necessario.

E' un'attività che gli piace molto e spesso continuano **spontaneamente** anche **a casa** come facevano i miei alunni, mostrandomi tutti contenti le **"ragnatele" fatte a casa,** varcando ben presto i confini di una sola pagina e occupando **2 pagine attigue**, "tessendo" ragnatele sempre più grandi e difficili, con rapidi progressi.

In tal caso, come già detto, non sarebbe possibile e non è necessario **correggere** analiticamente tanti esercizi tutti diversi. Però è bene visionarli e apprezzarli, magari vedendone insieme qualcuno e socializzandolo, e mettendo anche un Visto, Bene, ecc, **incoraggiando** tutti gli alunni, ed **apprezzando** i loro **progressi** e quello che fanno di positivo, anche se è poco, ed aiutando chi ne avesse bisogno.

Applicare le proprietà delle operazioni nel calcolo mentale

In tal modo le proprietà delle operazioni, **associativa**, **dissociativa, commutativa**, **distributiva**, vengono apprese e consolidate in modo **funzionale** e significativo, usandole e **applicandole** nel calcolo mentale, senza bisogno di definizioni **teoriche**, che saranno apprese gradualmente in un secondo momento, senza mettere il carro davanti ai buoi.

Allo stesso modo si può lavorare anche con le **frazioni,** e per molti altri apprendimenti, anche linguistici, partendo dall'**applicazione pratica** in attività ed esercizi significativi, seguiti e in parte accompagnati da una graduale riflessione mèta-cognitiva per una conoscenza anche **teorica**.

(vedi FRAZIONI)

Agire, operare, verbalizzare e simbolizzare

E' molto importante far eseguire **concretamente** le operazioni, dirette e inverse, come dice **Piaget.** La **manipolazione** è molto **più significativa,** motivante ed efficace delle **illustrazioni** e va fatta sistematicamente. Spesso invece gli insegnanti usano molto le **illustrazioni**, le schede illustrate, che ovviamente hanno anch'esse una certa validità, se usate bene, senza abusarne.

Ma, come osserva **Piaget**, le illustrazioni, specialmente se sono già fatte, sono **statiche** e poco efficaci per apprendere **le operazioni** che invece sono **dinamiche e reversibili,** con un dato di **partenza,** un **processo operatorio** dinamico che lo modifica, ed un **risultato finale**: il quale a sua volta diventa il dato di partenza nell'operazione inversa.

Una volta che le operazioni siano state apprese e capite bene, si potrà anche fare a meno della manipolazione, che però è fondamentale nella **fase iniziale**, e deve essere accompagnata dalla **verbalizzazione** e dalla espressione in **simboli matematici** per favorire la capacità di **astrazione** significativa e l'uso corretto e intelligente del linguaggio verbale e dei simboli stessi.

Inoltre, il **significato** delle operazioni viene capito, assimilato e padroneggiato tanto meglio quanto più le operazioni stesse sono motivate e servono per risolvere **situazioni** problematiche **significative** legate al **vissuto** e all'esperienza.

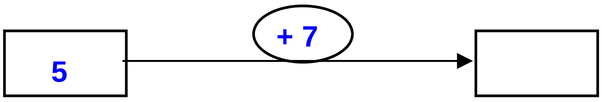
I campi concettuali *(G. Vergnaud)*

Michele Pellerey, su "*Orientamenti Pedagogici*", n° 3/'85, *"Verso una nuova stagione per la scuola?"*, evidenzia l'importanza delle conoscenze specifiche significative. *"In campo psicopedagogico, d'altra parte, si è costatata l'ina-deguatezza di un'impostazione diretta solamente all'acquisizione di un metodo di lavoro, allo sviluppo di capacità di apprendere in generale, allo stimolo di atteggiamenti esplorativi globali. La psicologia cognitivista ha rilevato il **ruolo decisivo** che gioca in tutto questo il **quadro concettuale** posseduto, l'insieme cioè dei **fatti, delle idee, dei principi, dei procedimenti resi propri** in maniera significativa e coerentemente compaginata. Per risolvere problemi, per fare ricerche, per leggere e capire, per seguire i ragionamenti, occorre conoscere fatti, avere idee appropriate, possedere concetti adeguati, disporre di esperienze riflesse e rappresentate, e tutto questo non in generale, ma riferito specificamente al campo o settore della conoscenza preso in considerazione. Non basta essere intelligenti, si deve anche sapere, e sapere le cose in modo chiaro e pertinente."*

Vergnaud evidenzia l'importanza di "**campi concettuali**" ben compresi per poter risolvere i problemi **senza dipendere** da procedure, formule, schemi e **modelli mnemonici.** I "**campi concettuali**" sono *"un insieme di situazioni per dominare le quali si richiede una grande varietà di concetti, procedure e rappresentazioni simboliche saldamente collegate tra loro." (Vergnaud)*
Il "campo concettuale delle **strutture additive**", ad es., comprende problemi come quello che segue, che si risolvono con la **stessa addizione 7 + 5**, ma che sono concettualmente molto **diversi**.

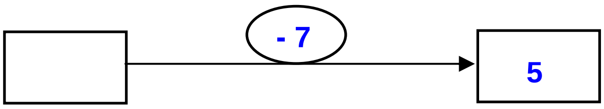
Trova lo **stato finale** : risolto facilmente già in prima elementare.

Peter ha 5 palline; gioca con gli amici e vince 7 palline.
Quante palline ha ora?



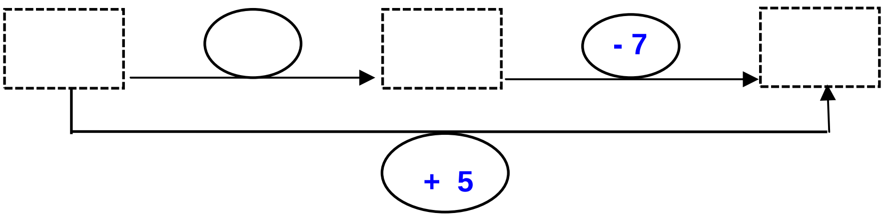
Trova lo **stato iniziale**: viene risolto 1-2 anni più tardi.

Robert ha perso 7 palline. Conta quante palline gli sono rimaste e vede che sono 5. Quante palline aveva prima di giocare?



*Trova il **primo operatore:** è sbagliato da molti in prima media.*

Thierry ha fatto 2 partite a palline. Nella seconda partita ha perso 7 palline. Al termine delle 2 partite trova che in tutto ha vinto 5 palline. Che cosa è successo nella prima partita?

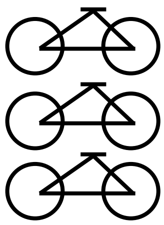


(Bruno D'Amore: "Problemi", F. Angeli)

3 - LA MOLTIPLICAZIONE

Con uno **schieramento** si può visualizzare la moltiplicazione come **addizione ripetuta**, riferita ad un problema, con la proprietà **commutativa.**

PROBLEMA -Quante ***ruote*** *hanno in tutto* ***3 biciclette*** *?*



2 ruote +

2 ruote +

2 ruote = **2 ruote x 3** = 6 **ruote**

3 ruote + 3 ruote = **3 ruote x 2** = 6 **ruote**

Mario Ferrari precisa che vi sono **altri approcci** alla moltiplicazione, escludendo il prodotto cartesiano:

*"Abbiamo lasciato per ultimo l'approccio che alcuni sussidiari e riviste si ostinano a chiamare pomposamente "**prodotto cartesiano.** E' un approccio da escludere completamente.*
*Una **prima** motivazione estrinseca, è data dal fatto che le nuove Indicazioni hanno **eliminato** gli **insiemi** dalla scuola elementare.*
*Una **seconda** motivazione sta nel fatto che il prodotto cartesiano tra insiemi è un'operazione difficile…e non è né commutativo né associativo.*
*Se qualche docente è affezionato al prodotto cartesiano può salvarne il contenuto intuitivo, evitando rigorosamente di usare l'espressione "prodotto cartesiano", ma parlando di numero di **combinazioni** con tutte le cautele del caso quando si tratta di moltiplicare per 1 o per 0."*

(Mario Ferrari, in "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", n°5 / 07)

Le suddette **combinazioni**, in una **tabella a doppia entrata,** sono disposte in uno schieramento.
La moltiplicazione è **l'operazione aritmetica** che le quantifica: è un'**addizione ripetuta** del numero di combinazioni disposte in **una riga** per il numero **delle righe,** o del numero di combinazioni disposte in **una colonna** per il numero **delle colonne.**

Uso delle marche e calcolo dimensionale

Per evitare confusioni e difficoltà nell'uso delle marche, nei **programmi '85** della scuola elementare se ne **sconsigliava l'uso.** Tuttavia penso che un loro **uso,** magari **limitato ed intuitivo,** possa aiutare a **capire meglio** il significato delle operazioni e la soluzione dei **problemi,** come sostengono anche **Arcà e Guidoni.** Un esempio è quello già fatto all'inizio con le 6 **ruote** di 3 **biciclette**.

Vediamone qualche altro.

*PROBLEMA -Ci sono **4 bambini** ed io gli regalo **3 caramelle** ciascuno.*
Quante caramelle regalo in tutto?

BA. 1	BA. 2	BA. 3	BA.4	
○	○	○	○	4 ca +
○	○	○	○	4 ca +
○	○	○	○	4 ca = **4 ca x 3 = 12 ca**

3 ca + 3 ca + 3 ca + 3 ca = **3 ca x 4 = 12 ca**

Nel testo del problema **4** è riferito ai **bambini**, mentre nell'indicazione dell'operazione in riga, con la marca, senza parentisi, se **4** è **moltiplicando,** rappresenta **4 caramelle,** da ripetere **3 volte.**

*PROBLEMA -Compro **3 giochi** uguali che costano **20 euro** ognuno.*
Quanto spendo in tutto?

GIOCO 1	GIOCO 2	GIOCO 3		
1 euro	1 euro	1 euro	=	3 euro +
1 euro	1 euro	1 euro	=	3 euro +
1 euro	1 euro	1 euro	=	3 euro +
1 euro	1 euro	1 euro	=	3 euro +
ecc..	ecc…	ecc…		

Immaginare **3 euro** ripetuti per **20 volte-righe** in uno schieramento di euro formato da **3 colonne** con **20 euro** ciascuna.

La spesa totale sarà 20 euro **x 3** = 60 euro;

o anche **3 euro x 20** = 60 euro.

Nel testo del problema **3** è riferito ai **giochi,** mentre nell'indicazione in riga dell'operazione, con la marca, senza parentisi, se **3** è **moltiplicando,** esso rappresenta **3 euro**, da ripetere **20 volte.**

Tale modo di ragionare mi sembra coerente, considerando **entrambi i fattori**, e non solo quello già indicato nel testo, riferiti agli **elementi da calcolare**, (gli euro nell'esempio), che si possono immaginare disposti in uno **schieramento**, magari solo nei problemi **più facili**.
Se no si dovrebbe ricorrere al ***calcolo dimensionale,*** che è il modo corretto di usare le marche, e cioè:

$\boxed{20\ \frac{euro}{gioco} \times 3\ giochi = 60\ euro}$ o anche $\boxed{3\ giochi \times 20\ \frac{euro}{gioco} = 60\ euro}$

In cui la marca "***giochi*" si elide** perché una volta al numeratore e un'altra al denominatore.
Ma è un modo formale astratto da scuola superiore, improponibile nella scuola primaria.

Nei problemi più difficili si può indicare l'operazione **senza** usare le **marche,** o usandole con le **parentisi**, riferite al solo **risultato**, come nell'esempio seguente.

*PROBLEMA -Un'auto viaggia alla velocità di **70 km all'ora.** Quanti km percorre in 3 ore?*

*Con la **marca***	*70 km x 3 = 210 km (km percorsi in 3 ore)*	
*Con le **parentisi***	*(70 x 3) km = 210 km;*	*(3 x 70) km = 210 km*
***Senza** le marche*	*70 x 3 = 210 ;*	*3 x 70 = 210 (km percorsi in 3 ore)*

*Con il **calcolo dimensionale*** $\boxed{70\ \frac{km}{h} \times 3\ h = 210\ km}$ *o anche* $\boxed{3\ h \times 70\ \frac{km}{h} = 210\ km}$

In cui la marca "***h***" **si elide**, in modo formalmente corretto, ma improponibile nella scuola primaria.

Nella quale, perciò, o si tralasciano le marche, o si può cercare di usarle in modo intuitivo a scopo **didattico**. Per far capire meglio, infatti, soprattutto agli alunni più piccoli, il significato delle operazioni nella soluzione dei problemi, può essere utile indicare con le marche a che cosa si riferiscono i numeri, che cosa rappresentano e che significato hanno nell'operazione, anche se ciò può contrastare con il rigore formale, che si può curare poi sempre meglio con il progredire del livello di scolarità.

Su tale questione **René Thom**, medaglia Field nel '58, (il "nobel" della matematica) osserva:
*"Si accede al **rigore assoluto** solo eliminando il **significato**. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, **scelgo quest'ultimo** senza esitare" (G. Ottaviani, "La teoria degli insiemi", su internet).*
E se ciò può valere per i **matematici**, figuriamoci per gli **insegnanti**.

Tabella della moltiplicazione

Nella parte **in giallo** si possono **costruire schieramenti** con dei gettoni e anche fare divisioni concrete.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	39	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Gli **schieramenti** e relativi **prodotti** si possono **capire e imparare** anche costruendoli concretamente su di una tavola pitagorica, (nella parte **gialla** di quella illustrata), con dei gettoni o **dischetti** di cartoncino che servono per chiudere le **cartucce** dei **fucili**.

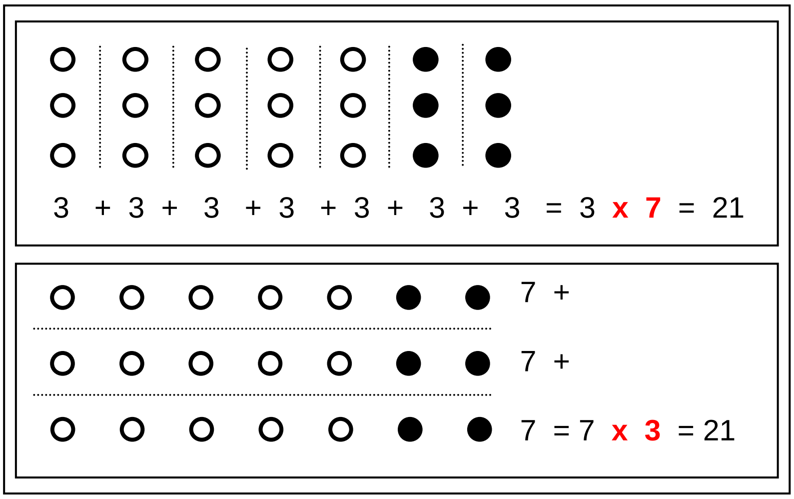
La stessa tabella può servire per **dividere** concretamente ad es. 16 caramelle, in **3 parti** uguali vedendo che in ciascuna parte ci sono **5 caramelle**, col resto di 1, (ripartizione).
O, avendo 16 caramelle, posso darne **3 a ciascun** bambino, vedendo che posso accontentare **5 bambini**, e avanza 1 caramella (contenenza). *(Vedi tabella operativa in NUMERI FACILI)*

Tabellina dei prodotti con gli schieramenti

Per **ciascun prodotto** si può disegnare uno **schieramento** su una scheda, per farlo **studiare, capire e memorizzare**, con maggiore impegno per i prodotti più **difficili** che sono relativamente **pochi**.
Si otterrebbe uno **schedario** con tutti i prodotti e i relativi schieramenti.
E' un altro modo molto efficace per **capire e memorizzare** le tabelline delle moltiplicazioni.

Ad es. l'alunno prende la scheda con lo **schieramento 7 per 8 = 56 e 8 per 7 = 56,** lo capisce e lo memorizza. E così via dai prodotti più facili fino a quelli più difficili.

Gli stessi schieramenti si possono anche **costruire** con dei gettoni o dischetti, o si possono **evidenziare** con dei righelli o strisce di cartoncino, sulla **tavola pitagorica**.
Ma averceli **disegnati stabilmente** in apposite schede può renderne più facile ed efficace lo studio.



Oltre il dieci

E' importante far eseguire prodotti in successione aumentando ogni volta di una unità il moltiplicatore **oltre il 10,** e aggiungendo mentalmente il moltiplicando al prodotto precedente.

Esempio: 6 per 10 = 60; **6 per 11 = 66; 6 per 12 = 72; 6 per 13 = 78**; ecc.

La gara-gioco delle tabelline

E’ un gioco tradizionale caduto un po’ in disuso forse anche perché ritenuto troppo competitivo, ma, fatto **come un gioco** può essere molto valido. Esso si svolge nel modo seguente.

Tutti gli alunni si dispongono in **coppie,** una **coppia dietro l’altra**.

L’insegnante chiede una tabellina **ai 2 alunni** della **prima coppia**: l’alunno che risponde per primo vince e resta in gara andando a mettersi in fondo, dietro a tutte le altre coppie, mentre quello che perde va a posto.

Quindi l’insegnante fa un’altra domanda ai 2 alunni della **seconda coppia**: l’alunno che vince va in fondo a formare un’altra coppia con il primo alunno che aveva vinto, mentre il compagno che perde va a posto anche lui.

In tal modo, dopo che l’insegnante ha fatto la **prima domanda** a tutte le coppie, **metà degli alunni** hanno **vinto** e sono andati a formare **altre coppie** disposte **una dietro l’altra,** mentre l’altra **metà** degli alunni è andata **a posto.**

Restano così **in gara metà** degli alunni disposti ancora in **coppie, una dietro l’altra**.

La gara continua nel modo suddetto, con una seconda serie di domande, e poi una terza, una quarta, ecc… dimezzando ogni volta il numero degli alunni che restano in gara, finché resta **in gara** una **sola coppia** di 2 alunni ai quali l’insegnante chiede **5 tabelline**: l’alunno che risponde prima a **3** di esse è **il vincitore.**

Tale **gioco** piace molto agli alunni che si impegnano a studiare le tabelline.

Ovviamente va fatta **gioiosamente, in forma ludica, senza esagerare la competizione,** e senza creare disagi e tensioni.

E’ anche importante incoraggiare tutti gli alunni e cercare di **far vincere un po’ tutti**, a rotazione, dosando opportunamente le domande.

Gli ostacoli intuitivi: moltiplicare e dividere con i decimali e lo zero

Lavorando con i numeri interi si consolida l'idea che **moltiplicando** si ottiene come risultato un **numero più grande**, e che invece, **dividendo**, si ottiene come risultato un **numero più piccolo**.

Tale convinzione costituisce però un forte **ostacolo intuitivo** alla comprensione quando si moltiplica o si divide un numero per un **decimale,** ottenendo come **risultato** un numero **più piccolo** nella **moltiplicazione** e un numero **più grande** nella **divisione**, **contrariamente** a quanto avveniva con i numeri interi.

Se si presentano a dei ragazzi di scuola media, anche di secondo grado, due operazioni come le seguenti, **10 x 0,5** e **10 : 0,5** e si chiede loro di dire, **senza** fare il **calcolo**, quale delle due darà il risultato maggiore, è molto probabile che alcuni rispondano che il risultato maggiore si avrà nella moltiplicazione 10 x 0,5 come è capitato in una ricerca.

E' difficile capire perché **8 x 0,5 = 4**, come **8 : 2**.

Più facile capire **0,5 x 8**, ripetendo **0,5 per 8 volte,** e ottenendo **4**.

Anche nella divisione c'è tale difficoltà: es. **8 : 0,5** = **16**, come **8 x 2**.

E' questo uno dei maggiori "**ostacoli intuitivi**" alla comprensione di tali operazioni, che può essere facilitata con esempi e problemi molto facili e concreti e con appropriati esercizi significativi.

Un'altra difficoltà riguarda la moltiplicazione per **0** che può essere capìta con riferimento a problemi molto semplici, ad es. calcolare quante caramelle contengono **5 scatole vuote**: **0 x 5 = 0**.

E perché non usare il titolo del libro, *"Non prenda* ***niente 3 volte al giorno*** ", di A. Di Stefano e Pippo Franco? In termini matematici **0 x 3 = 0**.

Si può usare lo zero, il niente, in esempi che suscitano ilarità per la loro assurdità sul piano pratico, ma che sono coerenti sul piano matematico.

In tal modo, con esempi e dati numerici molto facili ed intuitivi, anche tali difficoltà verranno gradualmente superate, in modo **persino divertente.**

4 - LA DIVISIONE

La divisione può essere introdotta ed usata per risolvere **problemi** di **contenenza o ripartizione**, come negli esempi seguenti.

CONTENENZA - SOTTRAZIONE RIPETUTA- RAGGRUPPAMENTI

*PROBLEMA - Hai **13 caramelle.** Le vuoi dare ad alcuni compagni, e ne dai **4 a ciascuno** di essi. Quanti compagni puoi accontentare?*

Un alunno è invitato a risolvere concretamente il problema.

Prende le 13 caramelle, **ne raggruppa 4** e le dà a un compagno, (1 volta); altre 4 a un altro compagno, (2 volte); ed infine altre 4 a un terzo compagno, (3 volte).

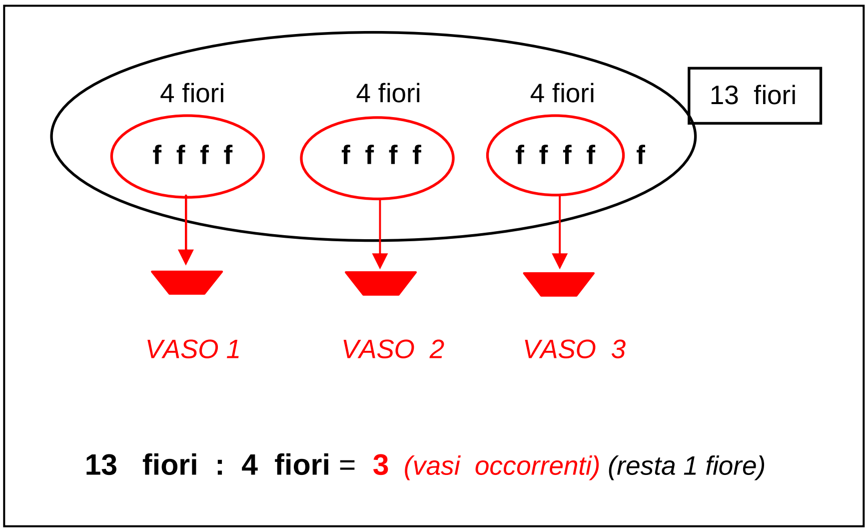
Può prendere-raggruppare-sottrarre 4 caramelle da 13 caramelle per **3 volte**, accontentando così 3 compagni. Resta 1 caramella.

Verbalizziamo: **il 4 nel 13 è contenuto 3 volte.** Resto 1.

13 car : 4 car = 3 *(compagni che posso accontentare) (resto 1)*

Si può anche **illustrare** il problema nel modo seguente.

*PROBLEMA -Ho **12 fiori** da mettere nei vasi. In ogni vaso devo mettere **4 fiori.***
Quanti vasi mi servono?



*PROBLEMA - Hai **13 caramelle** e le devi dividere in parti uguali tra **4 compagni.** Quante caramelle darai a ciascuno di essi?*

Ripartizione immediata diretta

Un alunno è invitato a risolvere concretamente il problema.
L'alunno prende le 13 caramelle.
Poi chiama vicino a sé **4 compagni** e distribuisce loro le 13 caramelle, dando **1 caramella** ciascuno **per 12 volte** o un **certo numero** di caramelle ciascuno **a occhio** facendo poi degli **aggiustamenti.**
Alla fine avrà dato **3 caramelle a ciascuno** dei 4 compagni.
Avanzerà 1 caramella: resto 1.

13 car : 4 = 3 car *(Caramelle date a ciascun compagno) (Resto 1)*

Ritengo che la **marca (car** nell'esempio) collocata in modo **diverso** nei 2 tipi di problema, possa aiutare a capirli meglio. Ma si può anche **tralasciare,** per una maggiore **correttezza matematica.**

Ripartizione mediata dalla contenenza

I 4 compagni che devono avere le **caramelle** poste **sulla cattedra** vengono mandati dall'insegnante **lontani** da esse, ad es. in fondo all'aula.
Se l'alunno solutore vuole ripartire le **13 caramelle** dandone **una ciascuno per 12 volte,** come nel caso precedente, dovrà fare **12 viaggi.**

Gli si dice, o meglio gli si fa scoprire, come eseguire l'operazione con pochi **viaggi,** prendendo, in ciascun viaggio, **non più** di **tante** caramelle **quanti** sono i **compagni** a cui le deve dare: in questo caso **non più di 4** caramelle per ogni viaggio.

L'alunno prenderà 4 caramelle e farà un primo viaggio, (1 volta), dando 1 caramella a ciascun compagno (ripartizione); e così per 3 volte, facendo **3 viaggi** (contenenza) con **4 caramelle** per volta, dando **ogni volta 1 caramella** a ciascun **compagno**, (ripartizione) per un totale di 3 caramelle ciascuno, con il **resto di 1** caramella.

In tal modo esegue la **ripartizione** (**3 caramelle** ciascuno), facendo **prima** i raggruppamenti o la sottrazione ripetuta (**3 viaggi** con 4 caramelle alla volta), che potrebbero anche essere raggruppate in 3 mucchietti di 4 caramelle prima di compiere i 3 viaggi, rappresentando e comprendendo così **sia la diversità che il nesso logico** tra i 2 significati intuitivi.

Si **verbalizza** e gradualmente si registra con i **simboli** matematici.

Il paradigma del tressette

Un fatto analogo accade quando si gioca **a tressette.**
Chi dà le **carte** deve dividere-ripartire **40 carte** tra **4 giocatori.** Dà **1 carta ciascuno** (ripartizione), contando però **i giri**, (contenenza) ogni volta che dà la carta a sé stesso.
Ogni volta che conta **1 giro** (contenenza) mentre dà la carta a se stesso, avrà quindi già dato **una carta a ciascuno** degli altri giocatori**.**

In tal caso **ciascun giro** viene contato **subito dopo** aver fatto la distribuzione-ripartizione di 1 carta a ciascun giocatore.

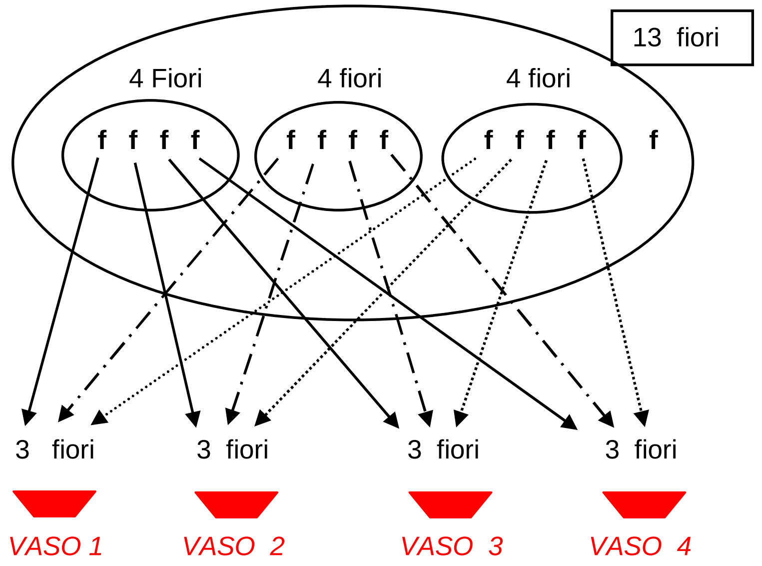
Alla fine chi dà le carte avrà contato **10 giri,** volte, gruppi di **4 carte,** sottratte **10 volte** (contenenza) da 40 carte, e contemporaneamente avrà dato **10 carte a ciascuno** dei 4 giocatori (ripartizione).

Si potrebbero anche fare prima **10 mucchietti di 4 carte** (contenenza) e poi ripartirle dando una carta a ciascun giocatore per ogni mucchietto, fino ad un totale di 10 carte ciascuno (ripartizione).

Allo **stesso modo**, assumendo come **paradigma**, cioè come **modello** generale, il modo di distribuire le carte nel tressette, si possono dividere quantità diverse di carte, o altre cose, es. **51 carte**, (aggiungendole da un altro mazzo, con doppioni), o caramelle, figurine, penne, colori, ecc…tra **6 giocatori**: ciascuno ne riceverà 8 e ne avanzeranno 3.

Si può anche **illustrare** il problema nel modo seguente.

*PROBLEMA -Ho **12 fiori** da mettere in **4 vasi**, in numero uguale. Quanti fiori metto in ciascun vaso?*



13 fiori : 4 = 3 fiori *(fiori che metto in ciascun vaso) (resto 1)*

Come già detto, ritengo che la **marca** (**fiori** nell'esempio) collocata in modo **diverso** nei 2 tipi di problema, possa aiutare a capirli meglio. Ma non è indispensabile, ovviamente, e si può tralasciare per una maggiore correttezza formale. Come già detto, infatti, un uso corretto delle marche richiede il **calcolo dimensionale**, a livello di scuola secondaria. Ritengo tuttavia che nella scuola elementare si possano anche usare in modo più semplice e **intuitivo**, per aiutare a capire meglio.

Agire, verbalizzare, simbolizzare

E’ molto importante far eseguire **concretamente** le operazioni, come dice **Piaget.** La **manipolazione** è molto **più significativa,** motivante ed efficace delle **illustrazioni** e va fatta sistematicamente.

Spesso invece si usano molto le **illustrazioni**, che ovviamente hanno anch’esse una certa validità, se usate bene, senza abusarne. Ma, come osserva **Piaget**, specialmente se sono già fatte, le illustrazioni sono **statiche** e poco efficaci per apprendere **le operazioni** che invece sono **dinamiche,** con una situazione di **partenza,** un **processo operatorio** dinamico che la modifica, ed un **risultato finale**.

Una volta apprese e capite bene, si potrà poi anche fare a meno della manipolazione, che però è fondamentale nella **fase iniziale**, e deve essere accompagnata dalla **verbalizzazione** e dalla espressione in **simboli matematici** per favorire la capacità di **astrazione** significativa e l’uso corretto e intelligente del linguaggio verbale e dei simboli stessi evitando così il vuoto verbalismo e l’astrattismo mnemonico.

Inoltre il **significato** delle operazioni viene capito, assimilato e padroneggiato tanto meglio quanto più le operazioni stesse servono per risolvere **situazioni** problematiche **significative** legate al **vissuto** e all’esperienza.

Non abusare di colori diversi

L’uso appropriato di colori diversi può essere utile per facilitare la comprensione di alcuni concetti, ma **non bisogna abusarne,** perché in alcuni casi, se i colori vengono usati male, possono **anche confondere** le idee e complicare inutilmente l’apprendimento.

C A L C O L O

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">AGITO: dinamico, operativo, con sussidi concreti.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">ILLUSTRATO:
-dinamico, costruendo l’illustrazione oppure operandoci modificandola;
-statico, con disegni già fatti, risultato di operazioni già fatte, da immaginare.</td></tr>
<tr><td></td><td>SCRITTO</td><td>ORALE MENTALE interiorizzato
MENTALE logico</td></tr>
<tr><td>IN COLONNA

(richiede molti calcoli mentali parziali)</td><td>$\begin{array}{r} 4\ 2\ - \\ \underline{3\ 8}\ = \\ 0\ 4 \end{array}$</td><td>Un’ alunna intelligente di classe terza ha eseguito la sottrazione 42 meno 38 a mente con difficoltà, sbagliando. Le ho chiesto come aveva fatto e lei ha detto:
-<u>Ho messo in colonna a mente</u>.
Si interiorizza ciò che si fa. Se avesse fatto più <u>calcolo mentale concreto e scritto in riga</u> come l’esempio sotto..</td></tr>
<tr><td>IN RIGA

MENTALE LOGICO

Con proprietà:
-associativa
-dissociativa
-commutativa
-distributiva
-invariantiva

Molto importante</td><td>+ 4
42 meno 38 = 4

---

17 + 8 = 17 + 3 + 5 = 20 + 5 = 25
3 + 5   20

---

16 x 5 = 10 x 5 = 50
+
6 x 5 = 30 = 80</td><td>MANIPOLARE-AGIRE
VERBALIZZARE CONCETTUALIZZARE
ASTRARRE - INTERIORIZZARE

Per capire bene, astrarre e interiorizzare i processi logici di calcolo mentale, è necessario operare e <u>rappresentarli concretamente</u> <u>con i sussidi</u>, e/o <u>scriverli in riga</u>, applicando le proprietà delle operazioni.

(esempi a sinistra e in pagine precedenti).</td></tr>
</table>

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

G. Noce - M.V. Missoni (a cura), *Il concetto di numero nella scuola e nella vita quotidiana,* La Nuova Italia '87.

D. Lucangeli , *Il farsi e disfarsi del numero*, Roma, Borla '99

O. Liverta Sempio, *Il bambino e la costruzione del numero*, La Nuova Italia scientifica, '97

Annarosa Civati, *La costruzione del numero nel bambino,* (S.I.M.15/10-11/'98)

Elena Valenti, "*La matematica nella nuova scuola elementare*", Le Monnier '87

Jacqueline Bickel, *L'educazione formativa*, Belforte editore, Livorno '82

Guido Petter, *Conversazioni psicologiche con gli insegnanti*, Barbèra '68

Jean Piaget, *Psicologia e pedagogia*, Loesher '73

Hans Freudenthal, "*Ripensando l'educazione matematica*", La Scuola '94.

Keith Devlin, "*L'istinto matematico*", Raffaello Cortina '07

M. Pellerey, *Oltre gli insiemi,* Tecnodid

M. Pellerey, *"Progetto RICME" (Rinnovamento curriculi mat. el.),* Armando '79

M. Pellerey, *Ancora un'impostazione insiemistica?* (L'Educatore 17/18 del '92)

M. Pellerey, *La logica a scuola,* ("Scuola viva", SEI, n°8, settembre '86)

Bruno D'Amore: *Problemi*, F. Angeli

Mario Ferrari, *Fare matematica…ecc..,* (L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", vol. 30A n°5/9/2007. Centro ricerche didattiche Ugo Morin)

M. Pia Rinaldelli Saitta, *(*San Severino, MC, 0733-639278) *IL CONTAFACILE, Su* "Scuola Italiana Moderna" n°4 del 15/10/2000