P R O B L E M I

di Ennio Monachesi

SITO ***www.monachesi.it***

Logica e creatività dei bambini
in situazioni problematiche significative e coinvolgenti.

Su L'EDUCATORE, n° 19/'94, nell'inserto "TRE SEI" n° 8/'94, dedicato alla scuola dell'infanzia, è narrata la seguente esperienza:

"Riportiamo uno dei lavori concretamente effettuato **in una scuola materna.** Situazione problematica: -**Marcello,** forma l'insieme dei blocchi **blu** e tu, **Claudia**, quello dei blocchi **quadrati**.

I bambini si mettono al lavoro, sono un po' perplessi circa i **blocchi quadrati-blu**, vince Marcello che dice che sono blu.
La maestra quindi si rivolge a Claudia: -Sei sicura di aver messo TUTTI i quadrati nel tuo cerchio ?
E Claudia: -Io li volevo mettere , ma Marcello ha detto che sono blu e li ha voluti lui.
-Se sono quadrati appartengono al tuo insieme.
Contenta Claudia prende i blocchi **quadrati-blu** dal cerchio di Marcello e li mette nel suo.
E la maestra: -Marcello, nel tuo insieme ci sono TUTTI i blocchi blu ?
Marcello guarda perplesso la maestra: -Prima li avevo, Claudia ha detto che sono suoi…!
Si continua così per un po' a spostare i blocchi **quadrati-blu da un cerchio all'altro**, poi ad un certo punto l'insegnante dice: -**Questo è un problema**, chi ha un'idea per risolverlo?

Le idee dei bambini sono moltissime, verifichiamole una ad una: quando essi faticano ad esprimersi, invitiamoli ad eseguire concretamente. Ecco alcune di queste IDEE .

Il bambino prende i **quadrati-blu** che sono **4** e ne mette **2 in un cerchio e 2 nell'altro**, e spiega: -Tutti e due li vogliono, forse ora che se li sono **spartiti** non bisticciano più.
Si verifica: -Marcello, nel tuo raggruppamento ci sono TUTTI i blu?
Claudia, tu hai TUTTI i quadrati?
Entrambi rispondono di **no.**

Un altro bambino dice: -Mettiamo i **quadrati-blu** in un **altro cerchio**.
Si pongono nuovamente le domande e si verifica che anche così non va bene.
Non è necessario che la soluzione del problema avvenga in giornata, si può aspettare;
nel frattempo, anche in giorni successivi, si possono realizzare **lavori simili in altri universi.**

Noi, il giorno successivo, abbiamo proposto: -Giochiamo con i bambini della sezione: vadano là in fondo tutte le **femminucce**, e da quest'altra parte tutti i bambini che indossano i **pantaloni.**
Anche questa volta ci sono **femminucce** con i **pantaloni** che **corrono**, prima verso il raggruppamento delle **femminucce**, poi verso quello dei bambini coi **pantaloni.**
-E' come con i blocchi **quadrati-blu**-, afferma un bambino. *(**Astrazione e generalizzazione**: nota dello scrivente)*
-Questa volta è più facile-, dice un altro, -le **femminucce** si possono **togliere i pantaloni**.
Altri propongono che invece di correre avanti e indietro tra i due raggruppamenti, le **bambine** con i **pantaloni** si fermino **in mezzo.**

Si ritorna al lavoro con i **blocchi logici** e si aspettano nuove idee.
Un bambino avvicina i cerchi e mette i quadrati-blu in fila **sulla cornice.**
Si ripetono le domande sottolineando la parola DENTRO.
-TUTTI i blocchi blu sono DENTRO il cerchio di Marcello?
Si ripete la domanda anche per Claudia.
Tutti i bambini rispondono di **no.**

Un'altra idea viene da un bambino particolarmente riflessivo e con una particolare competenza linguistica: -Se alzassimo **i cerchi,** tipo **capanna** indiana, e mettessimo **i quadrati-blu** al **centro**, si troverebbero **un po'** dentro **l'uno ed un po'** dentro **l'altro**.
E' bastato quindi **far cadere i due cerchi** per ottenere un **territorio comune.**

Esperienze di questo tipo ne abbiamo condotte in varie scuole materne o prime classi elementari: i bambini fanno quasi sempre le proposte che abbiamo descritto, eccettuata **l'ultima** che è stata **unica.**

Transfer e creatività

Partendo da **situazioni problematiche intensamente vissute**, il bambino mobilita le proprie risorse e cerca di soddisfare allarichiesta-esigenza di risoluzione. Tutte le attività sono organizzate in una vera strategia operativa: naturalmente la strategia può essere anche il risultato di tentativi non riusciti, di errori.

L'abilità di **risolvere problemi** è ben diversa dall'apprendimento mnemonico e ripetitivo: non si risolve un problema solo parlandone, è **necessario agire ed operare.**

*(Questo vale per i bambini, senza capacità di astrazione; ma può valere anche per **ragazzi e adulti**, quando affrontano **problemi estranei** alla loro esperienza: n.d.a.)*

L'acquisizione per problemi dei **concetti base,** attuata in modo significativo, permette il **trasferimento** dell'esperienza, *(del concetto o procedura appresi **ad altre situazioni (transfer),** favorendo l'autonomia, l'inventiva e la creatività: nota dello scrivente).*

Ecco **due esempi** di problemi creativi risolti dai bambini.

Riportiamo il racconto e il disegno *(qui tralasciato)* di **Claudia:**

*"Ho giocato a carte e ho "visto" che c'era il QUATTRO D'ORO , e allora ho pensato: ha 2 qualità e ho disegnato **le carte d'oro** in un insieme e i **quattro** nell'altro insieme."*
*(E il 4 d'oro **nell' intersezione**: n.d.s.)*

Ed ecco il racconto e il disegno *(qui tralasciato)* di **Stefania:**

*"Ieri pomeriggio ho giocato con mia cugina Giuliana. Io chiamavo "nonna Rosina", anche mia cugina Giuliana chiamava "nonna Rosina"; allora ho pensato di disegnare in un insieme **le mie nonne** e in un altro **le nonne di mia cugina Giuliana** . La **nonna Rosina** l'ho messa in mezzo (**intersezione**) perché è "nonna **mia** e di **mia cugina** Giuliana."*

(G.F. Maricchiolo: "TRE SEI" n° 8/'94,
su L'EDUCATORE, n° 19/94)

Gettare un ponte tra rigore e significato

Nel recentissimo libro di ***Keith Devlin,*** *"L'istinto matematico"*, si costata come i venditori di noci di cocco e gli acquirenti del supermercato se la cavano benissimo con la "***matematica di strada*",** "naturale" e piena di significato, con calcoli e problemi pratici e significativi, mentre falliscono con la "matematica scolastica", perché astratta, ma molto importante e potente come linguaggio universale. **Devlin** osserva: *"Il problema che molte persone hanno con la* ***matematica scolastica*** *è che non sono mai arrivate a comprenderne il significato: rimane per sempre un* ***gioco astratto di simboli formali."***

E allora bisogna cercare di "***gettare un ponte*",** come dice Freudenthal, tra la "matematica naturale" intuitiva, e quella "scolastica", formale, prendendo gradualmente dimestichezza con la seconda ed innestandola su di una **base motivante, intuitiva** e significativa. Per fare ciò è necessaria una didattica **laboratoriale**, e un approccio "***sostanziale-significativo*",** per capire e usare sempre meglio anche quello ***formale.*** *(Pellerey, "Progetto RICME", Vol I, pag. 14-20)*

Anche **René Thom,** medaglia Field nel'58, (il "nobel" della matematica) osserva: *"Si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra* ***rigore e significato****, scelgo quest' ultimo senza esitare" (Giorgio Ottaviani, "La teoria degli insiemi, da Cantor alla matematica moderna", su internet).*

Hans Freudenthal, riferendosi alla classificazione di **Treffers,** evidenzia l'importanza di una "*matematizzazione* ***orizzontale*",** collegata con la realtà, rispetto a quella "***verticale*",** autoreferenziale e scissa dalla realtà stessa. E quindi l'importanza di un approccio **"*realistico*"** che riesca ad integrare significativamente le 2 suddette modalità. *(H. F. "Ripensando l'educazione matematica").*

Un **approccio significativo** alla matematica abitua gli alunni a ragionare e argomentare con **coerenza logica**, confrontando e rispettando opinioni e tesi diverse, e sviluppando così una **competenza trasversale** molto importante, come prevedono le Indicazioni.

Importanza della comprensione

Per assicurare la comprensione dei problemi è importante rappresentarli **concretamente o drammatizzarli.**
I sussidi concreti, però, non devono far trascurare il **linguaggio verbale** e l'uso dei **simboli astratti.**
Anzi, devono essere il loro **trampolino di lancio.**

Il linguaggio verbale e simbolico, infatti, sarà tanto più pieno di significato quanto più si sarà curata adeguatamente la verbalizzazione riferita all'esperienza concreta, in "**presa diretta"** con il **pensiero.** E grazie a ciò diminuirà sempre più anche la necessità di esempi concreti, peraltro spesso ugualmente importanti, per capire, ragionare e risolvere problemi, in cui riveste un ruolo fondamentale la **comprensione semantica** delle **parole** e del **testo,** come dimostrano molte ricerche.

Mussen e Kagan, nel libro *"Linguaggio e sviluppo cognitivo"*, affermano:
"Dagli scritti di ***Piaget*** *si può di tanto in tanto dedurre implicitamente che il bambino di* ***5 anni è incapace*** *di* ***serializzare*** *in qualsiasi dimensione, e nessun bambino di 7 anni è capace di ragionare su qualsiasi argomento* ***senza oggetti concreti.***
Queste affermazioni categoriche sono ancora ***controverse.***

*La maggior parte dei **bambini di 5 anni** sostiene che il proprio **padre** è più grande di un **coniglio,** e che un coniglio è più grande di un **topo,** e si rende conto che il proprio padre è più grande di un topo, rivelando così una capacità di **ordinare** gli oggetti secondo una dimensione di grandezza.*

*La differenza tra questo problema e quelli utilizzati da Piaget consiste nel fatto che il problema del **padre** e del **coniglio** si riferisce a **nozioni molto familiari.***

*Se **non capisce** la domanda che gli viene fatta, il bambino agirà ovviamente a un livello **immaturo.***

*Piaget sostiene ad es. che il **bambino di 8 anni** non riesce a **classificare** se stesso in **2 dimensioni** contemporaneamente, cioè non riesce a considerarsi nello stesso tempo membro di una **città** ed anche di un **paese.***

*Uno dei motivi di questa carenza dipende dal fatto che il bambino **non comprende** completamente il **significato** semantico delle parole **città** e **paese:** non sa che una città fa parte di una **nazione.***
*Si può dimostrare che il bambino di **5 anni** è capace di **doppie classificazioni** quando comprende i 2 concetti. Il bambino di **5 anni** sa di far parte della **famiglia Rossi** e, nello stesso tempo, del **sesso maschile.** Ecc….*

Ciò dimostra l'importanza fondamentale del **significato** attribuito alle parole da cui dipende il **ragionamento logico.**

Per attivare il pensiero è necessario **capire il significato** delle parole e dei simboli: la **comprensione semantica** è il **carburante della logica** e favorisce molto anche l'interesse, la motivazione e la curiosità, l'autonomia ed una gioiosa creatività.

Guido Petter fa il seguente esempio:
"A Torino vive circa un milione di persone.
*Sulla testa di una persona non crescono più di **300.000 capelli**.*
*E' possibile affermare che a Torino ci sono sicuramente **2 persone** con lo **stesso numero** di capelli?".*
La soluzione è molto più facile se il problema, con la **stessa struttura** logica, contiene però **dati più intuitivi.** Ad esempio:
*"Sappiamo che **i mesi** dell'anno sono **12.** In una certa classe di una scuola ci sono **13 bambini**. E' possibile dire che in quella classe ci sono certamente **2 bambini** nati nello **stesso mese** ?".*

(G. Petter, "Psicologia e scuola primaria").

Keith Devlin scrive: *"Se trovavano un prodotto che costava **4 dollari** per un pacco da **3 etti** e un pacco più grande di **6 etti** per **7 dollari** molti acquirenti confrontavano in realtà i rapporti **4/3 e 7/6** per vedere qual era il maggiore. Per cui i ricercatori avevano inserito nel test la domanda: "**Qual è maggiore tra 4/3 e 7/6** ?" Ma la stessa acquirente che se l'era cavata benissimo al supermercato, nel test sbagliava.*
*I bambini (venditori di noci di cocco) erano sempre **precisi** quando sedevano dietro la loro **bancarella,** ma si dimostravano veri e propri **asini** quando veniva loro proposto lo stesso identico problema aritmetico, espresso però in una tipica formulazione **scolastica**.*
*I ricercatori ne rimasero così impressionati e incuriositi che coniarono un nome apposta per tutto ciò: **matematica di strada.** Ecc…. Poiché, sia i bambini di Recife sia gli alunni di Herndon avevano dimostrato di essere capaci di operare tranquillamente con l'aritmetica in alcuni **contesti a loro familiari,** quando i numeri avevano per loro **un significato**, sembra chiaro che il significato, o il senso pratico immediato, ha un ruolo **fondamentale** nella nostra capacità di fare **dell'aritmetica."***

(Keith Devlin, "L'istinto matematico")

L'importanza delle conoscenze ben organizzate e strutturate è stata evidenziata dalle teorie degli **"script"**, **"frame"**, **"schemi"**, presentate da **Dario Corno e Graziella Pozzo** nel libro "***Mente, linguaggio, apprendimento***", in cui si afferma: *"Pare che la maggior parte delle nostre capacità di ragionamento sia legata a schemi particolari di particolari ambiti di conoscenza."*

Tale conclusione è suggerita da alcuni esperimenti, tra cui quello di **Laird e D'Andrade**, in cui è stato proposto a uno stesso campione di persone 2 problemi di ***implicazione logica***, *("**se… allora**")*, con la stessa struttura logica, ma dal contenuto estraneo, nel primo, e molto più familiare nel secondo, riscontrando una percentuale di successi **5 volte superiore** nella soluzione del secondo problema.

D. Corno e G. Pozzo osservano: *"Il primo caso non è familiare, e i soggetti, non possedendo gli schemi entro cui riportare il problema, possono solo attivare strategie di soluzione di problemi molto generali. Il secondo caso è più vicino a situazioni **"reali"** di soluzione di problemi.*
Una volta "capìta" la situazione, in quanto codificata in termini di un insieme relativamente ricco di schemi, si possono introdurre i vincoli concettuali degli schemi per risolvere il problema.
*E' come se lo schema contenesse già tutti i meccanismi di ragionamento comunemente richiesti nell'uso degli schemi. **Capire** il problema e **risolverlo** sono perciò quasi la **stessa cosa**."*

I **2 problemi** usati nel suddetto esperimento sono come quelli citati nell'articolo "*Insegnamento **muro** e **ponte***", su L'Educatore, n° 1, 2008/'09, in cui Mario **Castoldi** scrive:
*"Nel suo bel libro sulla valutazione, M. Lichtner presenta, tra gli altri, questi **2 esempi** per dimostrare quanto sia diverso l'apprendimento scolastico, fondato su un ordine logico, dall' apprendimento in situazioni di realtà, fondato su un ordine pratico.*

*1-Hai le seguenti 4 carte. Devi verificare il rispetto della seguente **regola:** "Se su un lato c'è una **vocale,** sull'altro deve esserci un numero **dispari**", voltando il minor numero di carte.*
Quali carte volteresti ?

E	M	7	**4**

*2 -E' sera, al grande magazzino l'addetto controlla le opera--zioni della giornata. In particolare deve verificare che, in caso di acquisto **superiore a 30 $,** il tagliando sia stato **firmato** sul retro dal responsabile. Quali tagliandi deve voltare per verificarlo?*

40 $	25 $	***Ugo Re***	**……..**

Le 2 situazioni sono basate **entrambe su *un'implicazione logica*,** e in entrambe si devono voltare il **primo** e l'**ultimo** elemento.

Infatti: **se vocale (E)** allora **dispari;** perciò se **non dispari (4)** allora **non vocale.**
Se **più di 30 $ (40 $)** allora **firma**; perciò se **non firma** (…) allora **non più di 30 $**.
Ma il **secondo** problema è più facile perché è **più intuitivo.**

Come anche: **se piove** allora ci sono le **nuvole**; perciò, se **non** ci sono le **nuvole** allora **non piove.**
Ma non viceversa.
*Condizione **necessaria** ma **non sufficiente*** perché **piova** è che ci siano le **nuvole**.

Se PIOVE ---------► *allora*-------------► ci sono NUVOLE
NON PIOVE◄------ *allora*◄----- *se* NON ci sono NUVOLE

Se è **festa** allora **non** c'è **scuola**, perciò se c'è **scuola** allora **non** è **festa.**

Se stai a **Roma** allora stai in **Italia**, perciò, se **non** stai in **Italia** allora **non** stai a **Roma.**
Tutti quelli che stanno a **Roma** stanno in **Italia**, ma **non tutti** quelli che stanno in **Italia** stanno a **Roma.**

Se ti chiami **Ugo** allora sei un **maschio,** perciò, se **non** sei **maschio non** ti chiami **Ugo**.
Tutti quelli che si chiamano **Ugo** sono **maschi,** ma **non tutti** i **maschi** si chiamano **Ugo.**

Se è un **cane** allora è un **animale,** perciò, se **non** è un **animale** allora **non** è un **cane.**
Tutti i **cani** sono **animali,** ma **non** viceversa.

Se sei un **uomo** allora sei **mortale**, perciò, se **non** sei **mortale** allora **non** sei un **uomo**.
Tutti gli **uomini** sono **mortali**, ma **non** viceversa.

Da non confondere con la ***doppia implicazione*** *o coimplicazione logica*:
Se e solo se **respiri** allora sei **vivo**, e ***viceversa.***

Condizione ***necessaria e sufficiente*** perché tu sia **vivo** è che **respiri.**

Se e solo se *Se e solo se*
RESPIRI ←--------→ *allora* ←--------→ SEI VIVO
NON RESPIRI ←--------→ *allora* ←--------→ NON SEI VIVO

Se e solo se tu sei **mia madre** *allora* io sono **tuo figlio** e *viceversa.*
Se e solo se **oggi è giovedì** *allora* **domani è venerdì** e *viceversa.*
Se e solo se **adesso è giorno** *allora* **non è notte** e *viceversa.*

Anche nel linguaggio ordinario si dice:
-**Sbaglio** o sei **Ugo**? = Se **non sbaglio** sei **Ugo** = Se sbaglio non sei Ugo.

Mario Castoldi, nell'articolo citato con l'esempio dei 2 problemi, cita Comoglio che parla di un ***insegnamento "ponte***", un insegnamento significativo, con cui si cerca di collegare la cono-scenza con la realtà, e di un ***insegnamento "muro"***, che invece rende inerte la conoscenza.

Come afferma **Perkins:** *"La **conoscenza inerte** si trova in un attico della mente. Si scioglie solo quando in modo specifico è richiamata da un quiz o da una sollecitazione diretta."*

E come dice **Philipe Perrenoud**, *"La **conoscenza** non deve essere materia **inerte**, incapsulata all'interno delle discipline scolastiche, bensì materia viva, da mettere in **relazione** con le **esperienze** di **vita** e i problemi che la **realtà** pone."*

La comprensione è essenziale per la soluzione

Elena Valenti, nel libro *"La matematica nella nuova scuola elementare"*, evidenzia il ruolo fondamentale della **comprensione.**
Ella scrive: *"Una volta **capito il problema** bisogna cercare una **strategia risolutiva.** Non è sempre possibile fare una netta distinzione tra la fase della **comprensione** e la fase della **risoluzione** del problema perchè la strategia di risoluzione risente del modo in cui sono state individuate, **comprese** e rappresentate le informazioni.*

*Quando l'alunno è in grado di **rappresentare** nel suo spazio problemico gli aspetti cruciali del compito, raggiungere la soluzione è questione praticamente solo esecutiva.*
*Insomma **la comprensione** di un problema nel significato più completo del termine, **ha in sé** già presente un primo, forse ancora intuitivo, abbozzo del **procedimento di risoluzione.***

*Alla comprensione segue però la ricerca di una **procedura razionale e sicura** per mezzo della quale le informazioni contenute implicitamente nei dati e nelle **relazioni** che legano **i dati stessi** vengono rese **esplicite.** Questo principio vale anche per i problemi più **semplici ed intuitivi** come il seguente: Giorgio ha 5 palline rosse e 6 palline gialle. Quante palline ha in tutto?*

***Comprendere** questo problema significa **aver chiaro** che da 2 mucchi ben distinti, quello delle **palline rosse** e quello delle palline **gialle**, si deve passare ad una situazione in cui la distinzione cessa di esistere e tutte le palline devono essere considerate come facenti parte dello **stesso mucchio**.*
*Il bambino che **ha capito** ciò ha già fatto il **primo passo** verso la **risoluzione.***
Gli rimane ancora da scoprire il percorso matematico che permette di passare dai dati alla conclusione.

*Per la situazione finale manca ancora una risposta di tipo quantitativo, mentre è già presente, se ci viene passato il termine, una **«soluzione qualitativa».***
*Tant'è vero che se l'alunno, **manipolando** gli oggetti o rappresentandoli con un **disegno,** è in grado di **rispondere con un «Tutte queste»,** indicando il totale delle palline, possiarno dire che in un certo modo ha **soddisfatto alla domanda** del problema.*

*Diremo di più. In una prima fase, con un bambino piccolo, potremmo ritenerci soddisfatti di questo tipo di risposta. In fin dei conti per dare una risposta **numerica** è sufficiente **contare.***
*Rimane ora da scoprire **il percorso** che permette di passare **dai dati alla conclusione."***

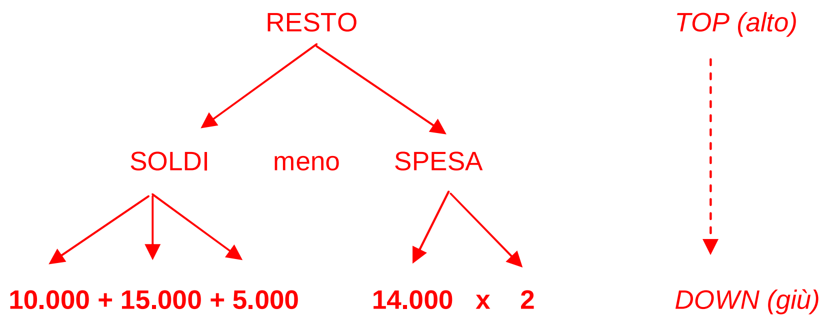
(Elena Valenti)

TOP DOWN

Il **Polya** individua due modi tipici di progettazione della soluzione di un problema:
1 -uno regressivo, o TOP DOWN (= dall'alto in giù),
2 -uno progressivo, o BOTTOM UP (= dal basso in su).

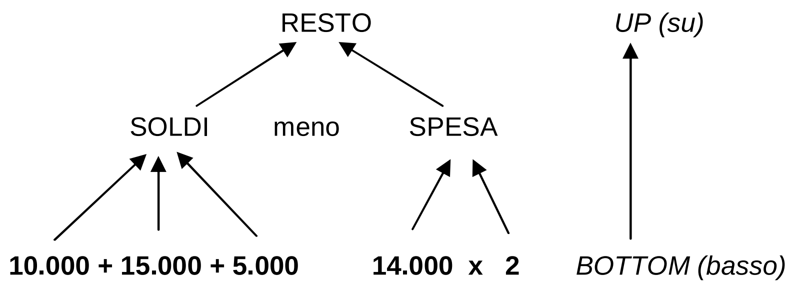
Un esempio: *Luca per il suo compleanno riceve 10.000 lire dal nonno, 15.000 lire dalla zia e 5.000 lire da una cugina. Va in un negozio con tutti i soldi e compera due automobiline che costano 14.000 lire ciascuna. Quanti soldi gli restano?*

Di fronte a questo enunciato c'e lo scolaro che procede in **modo regressivo,** quasi andando **a ritroso.** Parte **cioè dalI'incognita (i1 resto)** chiedendosi come possa trovarla, da quali dati può ricavarla. E così trova una nuova incognita (il costo delle due automobiline), a proposito della quale si pone nuovamente le domande: "Come posso ottenere questo tipo di risposta?
Da quali dati posso ricavare questo risultato che non conosco?"
Schematicamente **il ragionamento** può essere così **rappresentato** :



BOTTOM UP

C'e però anche l'alunno che procede in modo del tutto diverso. **Parte dai dati** e su questi si pone delle domande, quali: " Che cosa ho? Come posso usare questi dati? Che cosa posso ricavare da questi dati? " Si tratta quindi di un **procedimento progressivo,** un procedimento **«in avanti»,** o *BOTTOM UP (= dal basso in su),* che può essere così schematizzato :



Sia il sistema di progettazione **regressivo-top down** che quello **progressivo-bottom up** presentano vantaggi e limiti.

1-Nel primo caso, quello della progettazione **regressiva top down**, l'alunno occupa la maggior parte del tempo ad eseguire **i problemi più chiaramente delineati**, ma si ferma quando giunge ad un problema ausiliario che non sa risolvere.

2-Nel secondo caso, quello della **progettazione progressiva bottom up**, può ottenere un sempre maggior numero di informazioni, ma queste informazioni possono non essere sempre utili ai fini della soluzione. I dati possono essere anzi tanto numerosi da render imbarazzante la definizione delle loro relazioni. In questo modo di procedere insomma l'alunno può trascorrere la maggior parte del tempo a **costruire nuovi problemi** che non sono di alcun aiuto oppure a decidere quali problemi affrontare.

3-C'è però una **terza possibilità** che presumibilmente è quella **più seguita.**

Si tratta dell'opportunità, specie nel caso di problemi complessi, di elaborare un progetto senza lavorare per tutto il tempo nella stessa direzione.

Insomma l'alunno parte **a1ternativamente** dai **dati** verso **1'incognita** e dall**'incognita** verso i **dati** e stabilisce **qualche collegamento** promettente nel **centro** fra i **dati** che non ha ancora collegato ne con il **vertice**, ne con la **base.**

La scuola, di solito, fa utilizzare il procedimento **regressivo**, che, se nel complesso è **da preferirsi**, **non è però affatto 1'unica strategia** di risoluzione possibile. Bisogna anche tener conto che l'abilità di risolvere problemi viene raggiunta **non** secondo una **gradualità lineare,** ma attraverso un **processo complesso** e apparentemente **disorganico,** per cui, in certi momenti, lo scolaro si scontra con difficoltà che sembravano già superate, e in altri momenti adopera strategie di risoluzione diverse da quelle precedentemente utilizzate.

Si tratta insomma di una **conquista personale**, una costruzione che ha bisogno di tempi e di modi **diversificati**, che è condizionata, non solo dallo **sviluppo** intellettuale, ma anche dalle **esperienze** di ciascun alunno e dalla **metodologia** dell'insegnante". *(Elena Valenti, "La matematica nella nuova scuola elem." Le Monnier)*

Primum in intentione ultimum in esecutione

Il procedimento logico "**top down**" si utilizza in **qualsiasi progetto** intenzionale, come ad es. quando si vuole costruire una casa. Si progetta iniziando dallo **scopo** o **risultato** che si vuol ottenere, che è al primo posto, al **top**, nell'intenzione (**primum** in **intentione**); poi si stabiliscono a ritroso i **passi intermedi** necessari, fino a quello iniziale.

Da questo poi **si inizia** ad **agire** nella **fase esecutiva**, nella quale lo scopo prefisso verrà raggiunto alla fine, sarà il risultato ultimo nell'esecuzione pratica (**ultimum in esecutione**), come dicevano gli antichi.

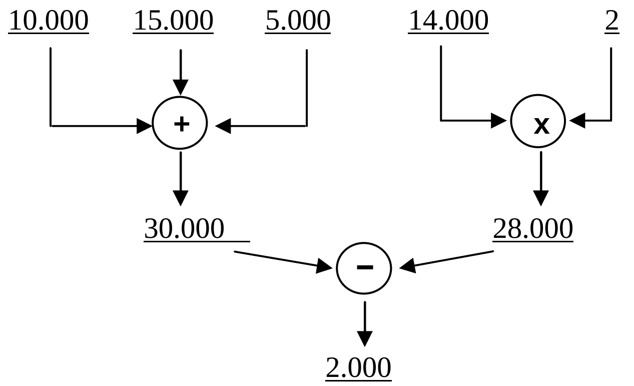
Quando invece gli obiettivi sono incerti, si agisce secondo il "**bottom up"**, che si potrebbe tradurre col detto: "**da cosa nasce cosa**", **in progress**, per "**tentativi ed errori**", in modo più spontaneo e aperto all' **imprevisto.**

Anche nella **vita**, di solito, si adottano sia il più **razionale** top down che il più **casuale** bottom up.

Diagramma ad albero per registrare la soluzione

I 2 schemi già visti, usati per rappresentare i 2 algoritmi logici TOP-DOWN e BOTTOM-UP, hanno il solo scopo di evidenziare **i 2 tipi** di ragionamento o **algoritmi logici** e sono diversi dagli **schemi e diagrammi** che si usano per rappresentare la **soluzione,** i quali necessariamente partono sempre **dai dati** per giungere **alla soluzione.**

Il **diagramma** ad **albero** che segue, riferito allo stesso problema considerato, serve per rappresentarne la **soluzione.** Esso parte necessariamente **dai dati** e dalle operazioni iniziali, che in tale grafico sono **in alto**, sopra, ma solo **materialmente**, mentre da un punto di vista logico essi sono **in basso**, nei 2 grafici **top down** o **bottom up**, che rappresentano appunto il ragionamento.



Ovviamente **si può fare benissimo a meno** di tali diagrammi**:** l'importante è **capire, senza dover per forza** usare rappresentazioni che possono essere utili ma non sono affatto indispensabili, e, se usate male, potrebbero anche essere **dannose.**

Numeri e parole

Come osserva la Valenti, i **dati numerici**, nel problema seguente, sono superflui, ma attirano fortemente l'attenzione rischiando di confondere e spiazzare.

In un cassetto ci sono 10 calze blu, 10 calze rosse e 20 calze nere. Qual è il numero minimo di calze che basta prendere per essere sicuri di averne prese 2 dello stesso colore?
*Questo stesso esempio può essere utilizzato per spiegare come i **dati numerici** (in **cifre**), attirino **l'attenzione** più delle **parole** che finiscono per essere trascurate mentre invece sono **essenziali** per la soluzione del problema. Sappiamo del resto che la presenza di dati numerici (in **cifre**) in un problema determina spesso, specie nei soggetti più deboli, la **convinzione** che, **se ci sono**, allora **bisogna adoperarli** in qualche modo."*

Per superare tale convinzione, e per abituare gli alunni a riflettere più attentamente, gli si potrebbe far risolvere anche problemi in cui ci siano dati superflui in cifre e dati numerici necessari in parole. In alcuni casi, poi, la parola fa capire meglio i concetti.

Ad es. scrivendo ***3 quinti*** si evidenzia maggiormente la diversa funzione del **numeratore** variabile e del **denominatore** costante. *(V e d i F R A Z I O N I)*

Il contratto didattico implicito *(Brousseau)*

L'esempio fatto dalla Valenti nel punto precedente riguarda anche le **convinzioni** degli alunni fondate su ciò che essi **si attendono** dall'insegnante e che questi **si attende** da essi., e che rientrano nel cosiddetto "**contratto didattico**" implicito, *(Brousseau*), condizionando i comportamenti e le risposte degli alunni con un insieme di "**clausole**", di **regole implicite**, tacitamente vigenti e rispettate da tutti nell'attività scolastica.

Una volta **Bruno D'amore**, in visita a una classe, fu invitato da una brava maestra a fare una domanda ai suoi alunni, molto preparati, sicurissima che avrebbero risposto brillantemente. Non era nelle intenzioni del professore interrogare gli alunni, ma visto che la maestra ci teneva tanto e insisteva perché lo facesse, alla fine accettò e chiese loro: *-Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?* Quasi tutti risposero **18 anni** lasciando di stucco la povera maestra. Ma un'alunna rispose **72 anni**, moltiplicando i 2 numeri, perché **i pastori** che lei aveva conosciuto erano **tutti vecchi**, escludendo perciò l'addizione che li ringiovaniva troppo!

Problemi-racconto: la ricerca-azione di Sergio Vallortigara

I problemi sono molto più interessanti e significativi in **forma di racconti,** vicini agli interessi, alle emozioni e all'esperienza degli alunni, in particolare per i bambini più piccoli. Quando si invitano i bambini a **inventare storie** legate ad una **situazione problemica**, in cui possono mettere **fantasia e sentimenti,** ma con l'obbligo di rispettare **i vincoli** posti da una situazione logica data, tutti si interessano e partecipano attivamente. Il bambino che non ama i linguaggi formalizzati, si interessa molto di più, comprende e **afferra** molto meglio se, invece di **un arido** problema si trova a risolvere domande legate ad un **raccontino** o ad una **storia.**

E' questo uno dei punti fondamentali del metodo ideato dal maestro **Sergio Vallortigara**, di **Malo**, **Vicenza**, a cui partecipano molti insegnanti che lo sperimentano in una ricerca-azione molto interessante. Fin dalla classe prima un alunno viene invitato a raccontare una storiella-problema ai compagni: chi indovina la soluzione ne va a raccontare un'altra.

In tal modo tutti gli alunni partecipano con grande interesse e **fermento** di idee e con una grande **varietà di racconti-problema** legati alle loro esperienze, che rendono molto significativo e coinvolgente tutto il lavoro matematico, con molte altre validissime attività, sussidi e proposte didattiche.

Anche Bruno **D'Amore** sottolinea l'importanza di proporre i problemi sotto forma di racconto. Ecco un esempio.

__Tre__ operai impiegano __6 ore__ a fare un certo lavoro.
Quanto tempo impiegheranno __2 operai__ a fare lo __stesso__ lavoro?

Se ci costruiamo un **piccolo raccontino**, come quello che segue, è molto più significativo e aiuta a ragionare per trovare la soluzione.

__Mario, Giorgio__ e __Giovanni__ sono __3__ boscaioli che lavorano insieme tutti i giorni, e in __6 ore__ riescono a tagliare 20 quintali di legna ogni giorno. Ma un giorno Giovanni non può andare a lavorare e perciò vanno solo __Mario e Giorgio__ che, __in due__, devono tagliare ugualmente 20 quintali di legna, come gli altri giorni. Secondo te, impiegheranno più o meno tempo? Perché? Quanto tempo impiegheranno?

(Vedi __scheda illustrata__ nelle pagine che seguono)

Risolvere problemi insieme, oralmente.

Nelle Indicazioni, tra i traguardi per lo sviluppo delle **competenze**, c'è la **verbalizzazione**, orale nella scuola primaria ed anche scritta nella secondaria, del **procedimento risolutivo** per mantenere il **controllo** dello stesso e **motivarlo,** abituandosi a ragionare con **coerenza.**

A tale scopo può essere molto efficace un'attività **orale** per **capire i problemi** e i procedimenti risolutivi, facendo lavorare gli alunni in **collaborazione**, in coppia o in piccoli gruppi, di alunni dello **stesso livello** o di **livello diverso**. Lavorando **insieme**, ciascuno può **aiutare e/o essere aiutato**, apprendendo in modo piacevole, significativo e **cooperativo.**

Per evitare di **annoiare** gli alunni più capaci e di **scoraggiare** quelli più lenti, consentendo a **tutti** di lavorare proficuamente, si possono proporre loro anche problemi di **difficoltà diversa**, **adeguati** alle **capacità** di ciascuno. A tale scopo trovai molto utile uno **schedario** con molti problemi di vario tipo, classificati per **tipologia** e graduati per **difficoltà**, con altrettante schede separate con le **soluzioni,** per poterle **verificare** da soli ed eventualmente **autocorreggersi.** Non so se ne esistano più in commercio, ma è anche possibile, in parte, realizzarlo autonomamente.

Il lavoro suddetto può diventare dispersivo, ma se è ben organizzato e valorizzato dall'insegnante, abitua gli alunni a **riflettere discutendo** e **confrontando** le loro idee, magari anche aiutati dall'insegnante stesso, **concentrandosi** sull'obiettivo più **importante**, quello di **capire** il **problema** e il **procedimento** risolutivo, oralmente, magari aiutandosi con eventuali appunti informali e/o **disegni e illustrazioni**, molto liberamente, svolgendo così **molto lavoro importante** in tempi relativamente **brevi**.

Anche **i rompicapo**, in particolare, si prestano bene a questo tipo di lavoro, che può diventare ancora più coinvolgente se qualche problema viene **drammatizzato,** come quello **di intersezione** con i bambini di **scuola dell'infanzia** riportato **all' inizio, a pag. 1-2-3.** *(Vedi anche ROMPICAPO, n° 16)*

I campi concettuali *(G. Vergnaud)*

Michele Pellerey, su "*Orientamenti Pedagogici*", n° 3/'85, ***"Verso una nuova stagione per la scuola?",*** evidenzia l'importanza delle conoscenze specifiche significative.

*"In campo psicopedagogico, d'altra parte, si è costatata **l'ina-deguatezza** di un'impostazione diretta solamente all'acquisizione di un **metodo di lavoro**, allo sviluppo di capacità di apprendere in generale, allo stimolo di atteggiamenti esplorativi globali.*
*La psicologia **cognitivista** ha rilevato il ruolo decisivo che gioca in tutto questo il **quadro concettuale posseduto,** l'insieme cioè dei fatti, delle idee, dei principi, dei procedimenti resi propri **in maniera significativa** e coerentemente compaginata.*
*Per risolvere problemi, per fare ricerche, per leggere e capire, per seguire i ragionamenti, occorre conoscere fatti, avere **idee appropriate**, possedere **concetti adeguati**, disporre di **esperienze riflesse e rappresentate**, e tutto questo non in generale, ma riferito **specificamente al campo** o settore della conoscenza preso in considerazione. Non basta **essere intelligenti**, si deve anche **sapere**, e sapere le cose in modo **chiaro e pertinente**."*

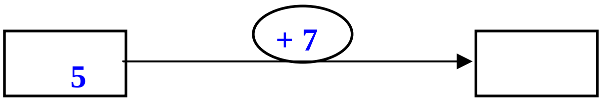
(Vedi INSEGNAMENTO APPRENDIMENTO, punto 7)

Vergnaud evidenzia l'importanza di "**campi concettuali**" ben compresi per poter risolvere i problemi **senza dipendere** da procedure, formule, schemi e **modelli mnemonici.**
I "**campi concettuali**" sono *"un insieme di situazioni per dominare le quali si richiede una grande varietà di concetti, procedure e rappresentazioni simboliche saldamente collegate tra loro." (Vergnaud)*
Il "campo concettuale delle **strutture additive**", ad es., comprende problemi come quelli riportati nella prossima pagina, che si risolvono con la **stessa** addizione **7 + 5**, ma che sono concettualmente molto **diversi**.

Campo concettuale delle strutture additive *(Vergnaud)*

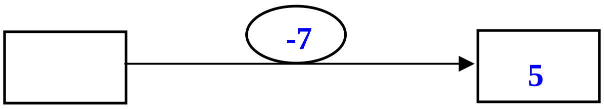
*Trova lo **stato finale** : risolto facilmente già in prima elementare.*

Peter ha 5 palline; gioca con gli amici e vince 7 palline.
Quante palline ha ora?



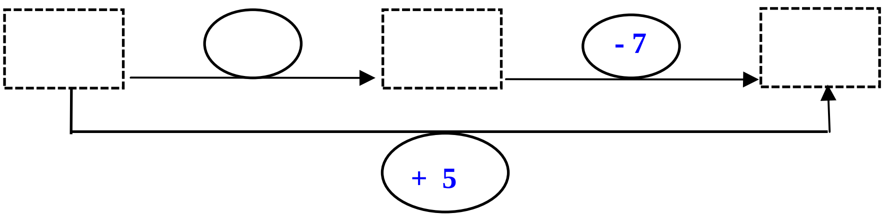
*Trova lo **stato iniziale**: viene risolto 1-2 anni più tardi.*

Robert ha perso 7 palline. Conta quante palline gli sono rimaste e vede che sono 5. Quante palline aveva prima di giocare?



*Trova il **primo operatore:** è sbagliato da molti in prima media.*

Thierry ha fatto 2 partite a palline. Nella seconda partita ha perso 7 palline. Al termine delle 2 partite trova che in tutto ha vinto 5 palline. Che cosa è successo nella prima partita?



(B. D'Amore: "Problemi", F. Angeli)

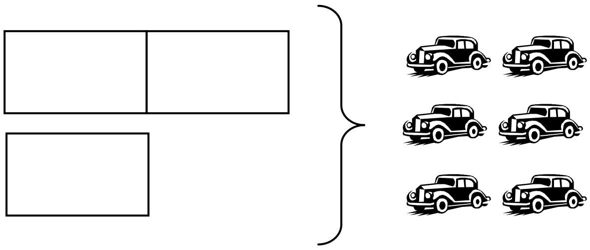
Somma e rapporto di 2 grandezze

1 -Primo livello

Carlo dice a Flavio: -Io ho il **doppio** delle tue automobiline; se le mettiamo insieme abbiamo in tutto **6 automobiline.** Quante automobiline ha Carlo? E quante Flavio?

Automobiline di ***Carlo***

Automobiline di ***Flavio***



2 -Secondo livello

Trovare 2 numeri sapendo che la loro **somma è 6** e che uno è il **doppio** dell'altro.

*Uno dei 2 numeri è diviso in **2 mezzi** e l'altro è **1 mezzo** del primo. In tutto sono **3 mezzi** che corrispondono a 6.*

*Per trovare **1 mezzo** faccio 6 diviso 3 = 2.*

*Poi moltiplico 2 per 2 = 4 che è il valore di **2 mezzi.***

3 -Terzo livello

Trovare 2 numeri conoscendo la loro somma e sapendo che uno è il doppio dell'altro.

$x + y = S$

Pongo numero minore $= x$

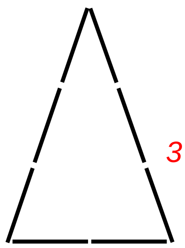
e quello doppio $y = 2x$

Rapporti con gli stecchini

Emma Castelnuovo, nel libro "*Didattica della matematica*", mostra come gli alunni riescono a risolvere molto più facilmente i problemi di rapporto con l'uso di stecchini, mentre il disegno viene spesso fatto male e risulta perciò inutile.

Esempio: *"Un triangolo isoscele ha **la base** che è i **2 terzi** del lato **obliquo.** Il suo perimetro misura 80 metri. Quanto sono lunghi i lati obliqui e la base?"*

Se si costruisce il triangolo con **stecchini uguali** si visualizza il rapporto e si intuiscono facilmente le operazioni da compiere.



Ed ecco un problema analogo, ma più semplice:

*"Un triangolo isoscele ha **la base** che misura **la metà** del lato **obliquo.** Il suo perimetro misura 50 metri. Quanto sono lunghi i lati obliqui e la base?"*

In quarta elementare gli alunni lo trovano alquanto **difficile**: con gli **stecchini** diventa molto più facile. Gli stecchini servono per rappresentare con chiarezza quello che il testo vuol dire.

Per assicurare la comprensione del testo è molto importante, oltre che **rappresentare concretamente** il problema, anche **l'inverso**, e cioè **verbalizzarne** la rappresentazione concreta, con parole piene di significato, e con un processo di astrazione significativa, per evitare l'astrattismo mnemonico e il vuoto verbalismo, del quale la **verbalizzazione significativa** è il miglior antìdoto.

Rappresentare, capire, verbalizzare

Il concetto di **rapporto** e i problemi con lo stesso sono difficili anche perché **estranei** all'esperienza degli alunni, che non capiscono il significato del testo, come avviene anche per altri problemi e argomenti. A ciò si può ovviare facendo **costruire, capire e verbalizzare** vari rapporti.
In tal modo il concetto di rapporto diventa familiare agli alunni, che così afferrano il significato delle parole e sono poi in grado di **comprendere i testi verbali** e **tradurli** in appropriate rappresentazioni significative, sia scritte che mentali. Le quali, come dice Bruno **D'Amore,** costituiscono *"l'anticamera logica della soluzione",* e consentono di trovare facilmente i procedimenti risolutivi e di capire perché si fanno certe operazioni e si applicano certe regole e formule.

Elena Valenti, nel libro *"La matematica nella nuova scuola elementare*", afferma: *"la **comprensione** di un problema....**ha in sé** già presente un primo, forse ancora intuitivo, abbozzo del procedimento di **risoluzione**".*

Ovviamente la comprensione del testo non basta; è indispensabile anche la padronanza delle operazioni, del linguaggio e dei concetti logico-matematici: ma la comprensione del testo può aiutare molto il ragionamento, specialmente nei problemi più intuitivi. *(Vedi "**Apprendimento-insegnamento**", punto 6-LA COMPRENSIONE DEL SIGNIFICATO E' ALLA BASE DEL RAGIONAMENTO)*

Molto importante è la **verbalizzazione orale significativa,** con cui si esprimono i concetti e i significati rappresentati con il disegno o i sussidi concreti. Grazie alla verbalizzazione l'alunno sarà poi in grado di fare il **processo inverso,** e cioè di comprendere pienamente il significato dei testi verbali, e **tradurli in disegni o rappresentazioni** significative, che, come già detto, Bruno **D'Amore** considera *"l'anticamera logica della soluzione",* poiché consentono di capire le regole e trovare i procedimenti risolutivi in modo logico, autonomo e consapevole, a volte anche originale.

Perciò attenzione! I sussidi e le rappresentazioni grafiche sono molto importanti, ma non devono far trascurare il linguaggio verbale e i simboli matematici. Anzi, ne devono costituire un **potente trampolino di lancio,** riempiendo di significato le parole ed i simboli astratti, come un prezioso carburante che alimenta i processi mentali logici, analogici e creativi. E il linguaggio verbale e simbolico, sarà tanto più pieno di significato quanto più si saranno curate adeguatamente la verbalizzazione e la simbolizzazione riferite all'esperienza e alle rappresentazioni concrete, in "presa diretta" con il pensiero.

Vediamo **un esempio** di **verbalizzazione**.

Agli alunni si fa **costruire** con degli stecchini uguali un rettangolo, o altre figure, che si possono anche proiettare con la lavagna luminosa, e si fa **verbalizzare**, anche solo **oralmente,** i rapporti sia **diretti** che **inversi** tra la base e l'altezza o altre dimensioni, per capire bene il **significato** delle parole e delle frasi usate. Ovviamente tali figure, invece che costruite, possono essere anche soltanto **disegnate**. Lo **scritto** e le formule seguiranno dopo e saranno piene di significato.

Costruire *con stecchini*
o fiammiferi

Proiettare*: lavagna luminosa*

ALTEZZA = ***3 quinti*** *della base*

BASE = ***5 quinti*** *(intero)*

h : b = 3 : 5   ***h : 3 = b : 5***

b : h = 5 : 3   ***b : 5 = h : 3***

Si può **verbalizzare e concettualizzare** in vari modi la **stessa** rappresentazione concreta, **invertendo i rapporti**, nel modo seguente.

L'ALTEZZA sta alla BASE	*come*	***3*** *sta a* ***5***
L'ALTEZZA sta a ***3***	*come*	*la BASE sta a* ***5***
La BASE sta all'ALTEZZA	*come*	***5*** *sta a* ***3***
La BASE sta a ***5***	*come*	*l'ALTEZZA sta a* ***3***

La BASE è ***5 fiammiferi****, cioè* ***5 quinti****;*
1 fiammifero è ***1 quinto*** *della base;*
l'altezza è ***3 quinti*** *della base****;***
il perimetro è ***16 quinti*** *della base****.***

L' ALTEZZA è ***3 fiammiferi,*** *cioè* ***3 terzi;***
1 fiammifero è ***1 terzo*** *dell'altezza;*
la base è ***5 terzi*** *dell'altezza;*
il perimetro è ***16 terzi*** *dell'altezza.*

Il PERIMETRO è ***16 fiammiferi****, cioè* ***16 sedicesimi****;*
1 fiammifero è ***1 sedicesimo*** *del perimetro;*
la base è ***5 sedicesimi*** *del perimetro;*
l'altezza è ***3 sedicesimi*** *del perimetro.*

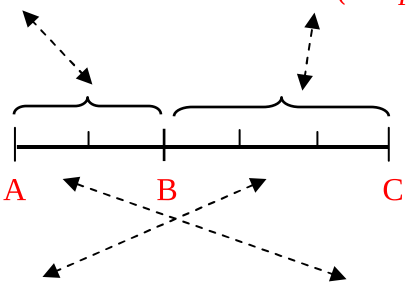
Verbalizzare in modo diversi la stessa realtà

Verbalizzare in modi **diversi** la **stessa** situazione o rappresentazione concreta favorisce molto la **comprensione** e quindi **la soluzione** del problema.

Il seguente problema faceva parte delle prove di ammissione a un corso, e alcuni **laureati, non in matematica,** lo **sbagliarono**, applicando meccanicamente un vago ricordo di formule.
Se invece fossero stati abituati a **verbalizzare** e **capire….**

*Calcolare la misura di 2 segmenti sapendo che la loro **somma è 20** cm*

*e che **un segmento** è i **2 terzi** dell' **altro** (che perciò è **3 terzi)***



AB = 2/3 BC

AB : BC = 2 : 3

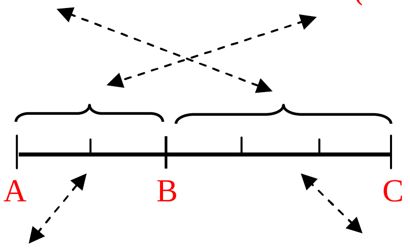
*Il segmento BC è **3 terzi** e il segmento AB è **2 terzi** di BC.*

*La loro somma è **3 terzi** di BC + **2 terzi** di BC = **5 terzi** di BC*

Inverto il rapporto

*Calcolare la misura di 2 segmenti sapendo che la loro **somma è 20 cm***

*e che un segmento è i **3 mezzi** dell'altro (che è **2 mezzi**)*



BC = 3/2 AB

BC : AB = 3 : 2

*Il segmento **AB è 2 mezzi** e il segmento **BC è 3 mezzi** di AB.*

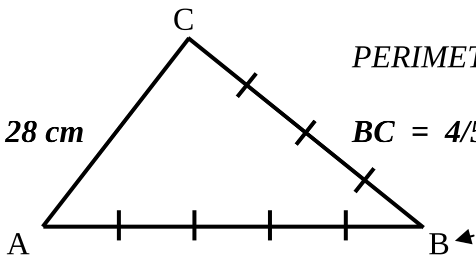
*La loro somma è **2 mezzi** di AB + **3 mezzi** di AB = **5 mezzi** di AB*

Verbalizzare in modi **diversi** la **stessa** rappresentazione concreta, e viceversa, **rappresentare** concretamente i **testi verbali**, consente di capire bene il problema e le operazioni per risolverlo, che altrimenti rischiano di essere l'applicazione **meccanica** di una regola. La quale in apparenza può sembrare **più semplice** e immediata: in realtà è solo più **semplicistica** se trascura e **cortocircùita** i **concetti** su cui si fonda. L'esempio fatto può essere **troppo difficile** perché esposto in forma sintetica: si può e si deve **semplificare,** se necessario, anche nei modi visti nelle pagine precedenti.

PROBLEMA *con **somma e rapporto** di 2 grandezze (terzo tipo)*

Un triangolo ha il perimetro di 100 cm e un lato di 28 cm.
*Degli altri 2 lati, **uno è i 4 quinti dell'altro**: quanto misura ciascuno di essi ?*

AC = 28 cm



PERIMETRO = 100 cm

***BC = 4/5 di AB** (che perciò è **5/5**)*

*Costruire il triangolo con **stecchini o fiammiferi** uguali.*

*Il lato AB è **5 quinti.** Il lato BC è **4 quinti** di AB. La loro somma è **9 quinti** di AB.*

SOLUZIONE

cm 100 - cm 28 = cm 72 (AB + BC)
*AB + BC = **5/5** di AB + **4/5** di AB = **9/5** di AB = cm 72*
*cm 72 **:** 9 = cm 8 (1/5 di AB)*
cm 8 x 5 = cm 40 (5/5 di AB = 1 AB)
cm 8 x 4 = cm 32 (4/5 di AB = BC)

PROBLEMA LOGICAMENTE **ISOMORFO**

Con la **stessa struttura logica**, ma di contenuto diverso, più **familiare e facile** da capire.

In 3 vasi ci sono dei fiori tutti uguali che sono costati in tutto 32 Euro.
I fiori del primo vaso sono costati 14 Euro.
*Nel secondo vaso ci sono **5 fiori** e nel terzo vaso altri **4 fiori.***
Quanto sono costati i fiori del secondo e del terzo vaso?

E' molto più facile risolvere questo secondo problema, che, pur avendo la **stessa struttura logica** del precedente, è molto più intuitivo e comprensibile perché i **dati** sono più **familiari.**
Inoltre la soluzione si basa sul ragionamento e **non è legata** a **formule** già "**confezionate",** che possono rischiare di scadere in **automatismi mnemonici** se manca la comprensione logica, come può avvenire nei problemi come quelli sui rapporti e molti altri, per i quali appunto sono previste **apposite formule** da **ricordare**, ma soprattutto **da capire.**

PROBLEMA con ***differenza e rapporto*** *di 2 grandezze (quarto tipo)*

Mario ha 28 figurine più di Carlo.
Le figurine di Carlo sono i ***3/10 di quelle di Mario.*** *(Che perciò ne ha 10/10)*
Quante figurine ha Mario? E quante ne ha Carlo?

 *Figurine di Mario =* ***10 decimi***

 *Figurine di Carlo =* ***3 decimi*** *di quelle di Mario*

10 decimi = *figurine di* ***Mario*** *(dato* ***non espresso*** *nel testo, da inferire)*
3 decimi *delle figurine di Mario = figurine di Carlo*
28 figurine = figurine che ha ***in più*** *Mario*

SOLUZIONE

Mario ha 10 decimi e Carlo 3 decimi: perciò Mario ha 10 – 3 = ***7 decimi*** *più di Carlo, che corrispondono a* ***28 figurine.***

Per trovare ***1 decimo*** *devo dividere 28 figurine in* ***7 parti uguali****, e ottengo* ***4 figurine.***
Perciò ***10 decimi*** *sono 4 per 10 = 40 (figurine di Mario)*
E ***3 decimi*** *sono 4 per 3 = 12 (Figurine di Carlo)*

10 decimi - 3 decimi = ***7 decimi*** *(decimi che ha in più Mario, corrispondenti a* ***28*** *figurine)*
28 fig ***: 7*** *= 4 fig (****1 decimo*** *delle figurine di Mario)*
4 fig ***x 10*** *= 40 fig (****10 decimi*** *, cioè tutte le figurine di Mario)*
4 fig ***x 3*** *= 12 fig (****3 decimi*** *, cioè figurine di Carlo)*

PROBLEMA LOGICAMENTE **ISOMORFO**

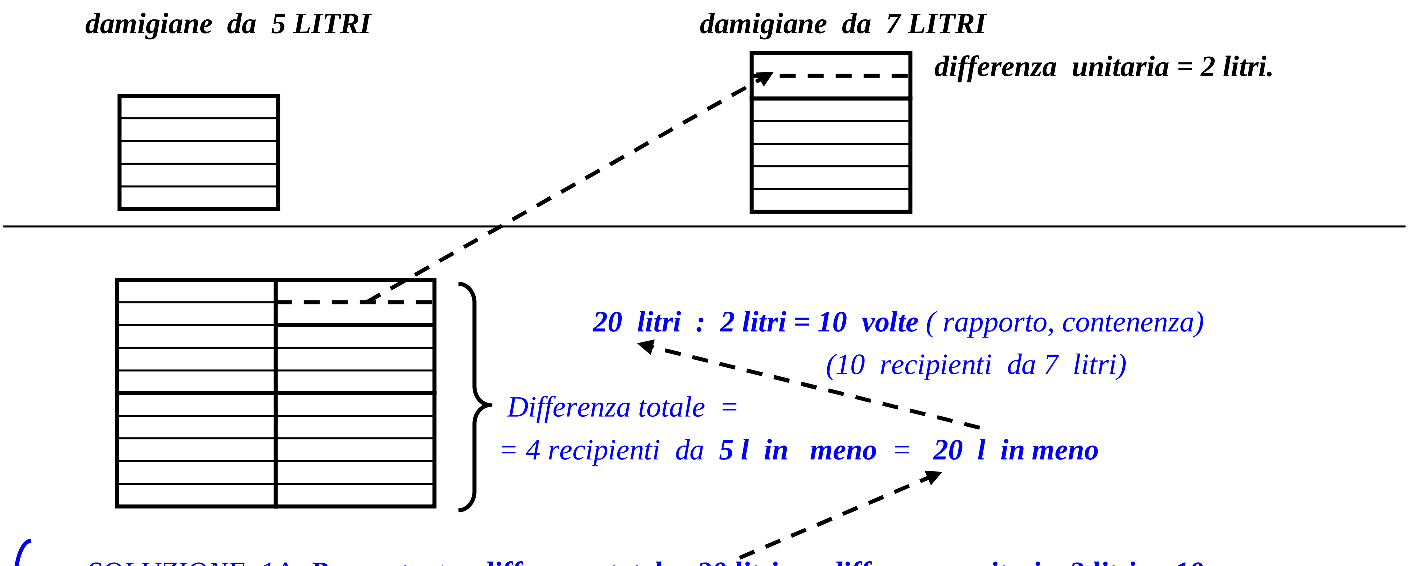
Con la **stessa struttura logica**, ma di contenuto diverso, più **familiare e facile** da capire.

In un negozio, ieri, sono stati venduti 3 diari uguali. Oggi ne sono stati venduti altri 10 uguali. Da tale vendita, oggi si è ricavato 28 Euro più di ieri.
Quanto si è ricavato in tutto oggi? E ieri ?

E' molto più facile risolvere questo secondo problema, che, pur avendo la **stessa struttura logica** del precedente, è molto più intuitivo e comprensibile perché i **dati** sono più **familiari.**
Inoltre la soluzione si basa sul ragionamento e **non è legata** a **formule** già "**confezionate",** che possono rischiare di scadere in **automatismi mnemonici** se manca la comprensione logica, come può avvenire nei problemi come quelli sui rapporti e molti altri, per i quali appunto sono previste **apposite formule da ricordare,** ma soprattutto da **capire.**

PROBLEMA *con rapporto tra* ***differenza totale*** *e differenza* ***unitaria.***

Con una certa quantità di vino si riempiono alcune damigianette della capacità di ***5 litri.*** *Se utilizziamo damigiane da* ***7 litri****, per la* ***stessa quantità di vino****, ne occorrono* ***4 di meno.*** *Quante sono le damigiane da 5 litri ? E quante quelle da 7 litri ?*



SOLUZIONE 1A ***-Rapporto*** *tra* ***differenza totale , 20 litri*** *, e* ***differenza unitaria, 2 litri = 10***

Per ogni damigiana da 7 litri utilizzo il vino di una damigiana da 5 litri più 2 litri di un'altra damigiana in meno da 5 litri. **I 2 litri in più** per ciascuna damigiana da 7 litri, li prendo dai **20 litri totali in meno** delle 4 damigiane in meno da 5 litri, per **10 volte**, riempiendo così **20 litri : 2 litri** = **10** damigiane da 7 l. *(Vedi sotto* ***soluzione 3A****)*

SOLUZIONE 1B ***-Rapporto*** *tra* ***differenza totale , 28 litri*** *, e* ***differenza unitaria, 2 litri = 14***

Immagino di aumentare a **7 litri** tutte le damigiane **da 5 litri,** ottenendo **tante** damigiane **da 7 litri** quante sono **quelle da 5 litri** , cioè **4 di più** di quelle effettive: occorrerebbero 7 litri x 4 = **28 litri in più**, utilizzando, per ciascuna damigiana da 5 litri, **2 litri in più** che dovrei prendere dai **28 litri totali in più** necessari, riempiendo così **28 litri : 2 litri** = **14** damigiane da 7 litri , che abbiamo ipotizzato essere **tante quante** quelle da 5 litri. Le **damigiane da 5 litri** perciò **sono 14.** Quelle da **7 litri sono 14 - 4 = 10** *(Vedi soluzione 3B)*

SOLUZIONE 2 ***-La quantità totale*** *di vino deve essere un* ***multiplo comune di 5 e di 7***

Se fosse il **m. c. m. di 5 e 7, cioè 35**, le damigiane sarebbero **7 da 5 litri o 5 da 7 litri**, con una **differenza di 2** damigiane. Poiché **la differenza** tra le damigiane da 5 e quelle da 7 litri è **doppia, cioè 4,** anche la quantità di vino sarà un **multiplo doppio di 35**, cioè **70 litri.** Perciò le **damigiane** saranno **10 da 7 litri o 14 da 5 litri.**

SOLUZIONE 3

SOLUZIONE 3A	*SOLUZIONE 3B*
Pongo x = damigiane da 7 litri	**Pongo x = damigiane da 5 litri**
$7x = 5(x + 4)$	$5x = 7(x - 4)$
$7x = 5x + 20$	$5x = 7x - 28$
$2x = 20$	$2x = 28$
$x = 20 : 2 = 10$ *(damigiane da 7 l)*	$x = 28 : 2 = 14$ *(damigiane da 5 l)*

PROBLEMA

Rapporto *tra differenza IPOTETICA* ***totale*** *e differenza IPOTETICA* ***unitaria***

A-Prima parte **:** *In un cortile ci sono polli e conigli. In tutto hanno* ***26 zampe.***
Quante sono le combinazioni possibili?

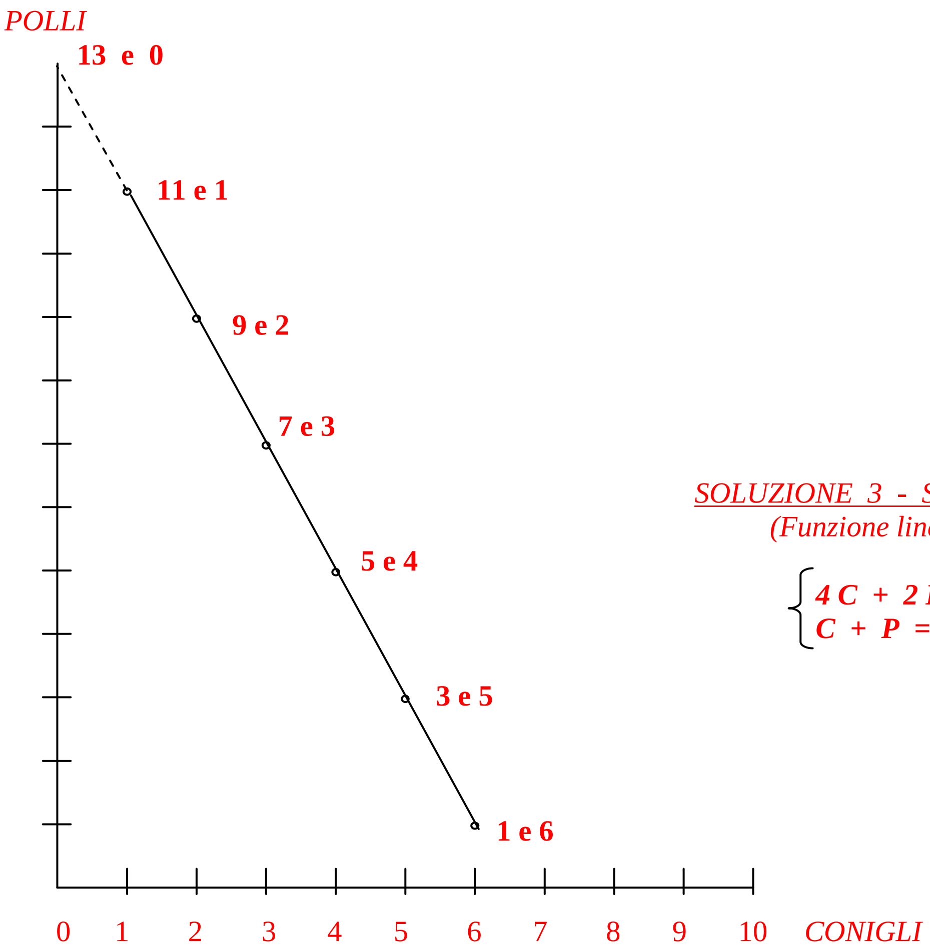
CONIGLI (per 4)	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
POLLI (per 2)	***11***	***9***	***7***	***5***	***3***	***1***

B-Seconda parte: *Se gli animali sono* ***8 in tutto****, quanti sono i polli? E quanti i conigli ?*

SOLUZIONI

SOLUZIONE 1. Immagino che sono **tutti conigli**: ci sarebbero **2 zampe in più** (differenza unitaria) per **ciascun pollo** al cui posto immagino 1 coniglio.
Tutte le zampe sarebbero 4 x 8 = 32 zampe, con una **differenza totale** di 32 - 26 = **6 zampe** in più.
Ogni **2 zampe in più** corrispondono ad **1 pollo** al cui posto ho immaginato 1 coniglio.
Perciò i polli sono **6 za : 2 za = 3 polli.** I conigli sono 8 - 3 = 5 conigli.

SOLUZIONE 2. Immagino che sono **tutti polli**: ci sarebbero **2 zampe in meno** (differenza unitaria) per **ogni coniglio** al cui posto immagino 1 pollo.
Tutte le zampe sarebbero 2 x 8 = 16 zampe, con una differenza totale di 26 - 16 = **10 zampe** in meno.
Ogni **2 zampe in meno** corrispondono a **1 coniglio** al cui posto ho immaginato 1 pollo.
Perciò i conigli sono **10 za : 2 za = 5 conigli.** I polli sono 8 - 5 = 3 polli.



SOLUZIONE 3 - SISTEMA DI EQUAZIONI
(Funzione lineare di Diòfanto)

$$\begin{cases} 4C + 2P = 26 \\ C + P = 8 \end{cases}$$

PROBLEMA

Rapporto** tra differenza IPOTETICA **totale** e differenza IPOTETICA **unitaria

A-Prima parte: *Con **50** Euro compro **calze** da **5 Euro** ciascuna e **cravatte** da **10 Euro** ciascuna. Quante sono le combinazioni possibili?*

*CALZE = **y** (per 5)*	***8***	***6***	***4***	***2***
*CRAVATTE = **x** (per 10)*	***1***	***2***	***3***	***4***

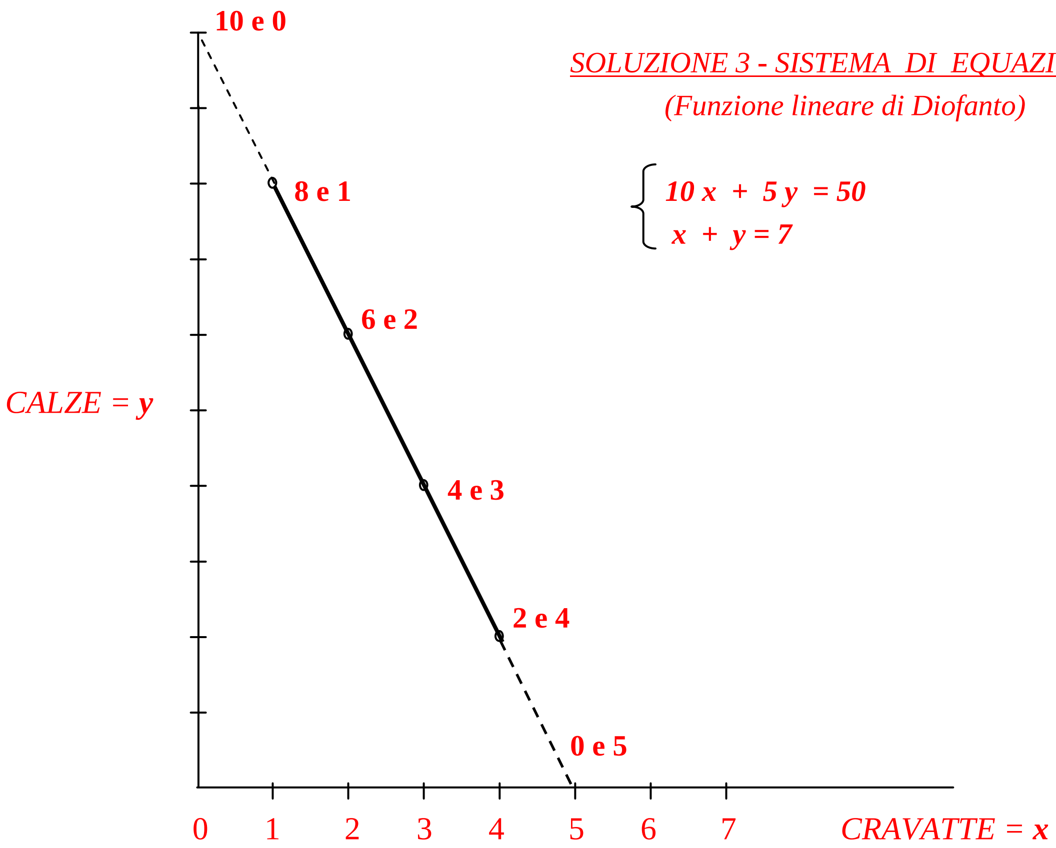
B-Seconda parte: *Compro in tutto **7 pezzi** : quante gomme? Quante matite?*

SOLUZIONI

SOLUZIONE 1 Immagino di comprare **tutte cravatte**: spenderei **5** Euro **in più** (differenza unitaria) per **ciascuna calza** al cui posto compro 1 cravatta. La spesa totale sarebbe di 10 x 7 = 70, con una differenza totale di 70 - 50 = **20 Euro in più**. Ogni **5 Euro in più** corrispondono a **1 calza** al cui posto ho comprato 1 cravatta. Perciò le calze sono **20 Euro : 5 Euro = 4 calze.** Le cravatte sono 7 - 4 = 3 cravatte.

SOLUZIONE 2 Immagino di comprare **tutte calze**: spenderei **5 Euro in meno** (differenza unitaria) per **ciascuna cravatta** al cui posto compro una calza. La spesa totale sarebbe di 5 x 7 = 35 Euro, con una differenza totale di 50 - 35 = **15 Euro in meno.** Ogni **5 Euro in meno** corrispondono a **1 cravatta** al cui posto compro 1 calza. Perciò le cravatte sono **15 Euro : 5 Euro = 3 cravatte.**

Le calze sono 7 - 3 = 4 calze



SOLUZIONE 3 - SISTEMA DI EQUAZIONI

(Funzione lineare di Diofanto)

$$\begin{cases} 10\,x + 5\,y = 50 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

PROBLEMA

Tre semplice inverso.

1-Testo sintetico astratto *(Più difficile)*

Tre operai impiegano 6 ore a fare un certo lavoro. Quanto tempo impiegheranno 2 operai a fare lo stesso lavoro?

2- Testo rielaborato in forma narrativa-intuitiva *(Più facile)*

Tre boscaioli lavorano insieme tutti i giorni, e in 6 ore riescono a tagliare 20 quintali di legna al giorno. Ma un giorno uno di essi non può andare a lavorare. Quel giorno, perciò, i boscaioli sono solo in due a tagliare la legna, ma devono tagliarne ugualmente 20 quintali, cioè la stessa quantità degli altri giorni. Secondo te, impiegheranno più o meno tempo? Perché? Calcola quanto tempo impiegheranno.

SOLUZIONI

RISOLUZIONE CON IL METODO DI ***RIDUZIONE ALL'UNITA'****. (Più intuitivo)*

Se per compiere quel lavoro ***3 operai****, lavorando insieme, impiegano* ***6 ore****,* ***1 solo operaio,*** *dovendo fare anche il lavoro degli altri 2, impiegherebbe* ***3 volte*** *di più, e cioè ore 6 per 3 = 18 ore. Se 1 solo operaio impiega 18 ore,* ***2 operai*** *insieme impiegano* ***la metà****, cioè ore 18 diviso 2 = 9 ore.*

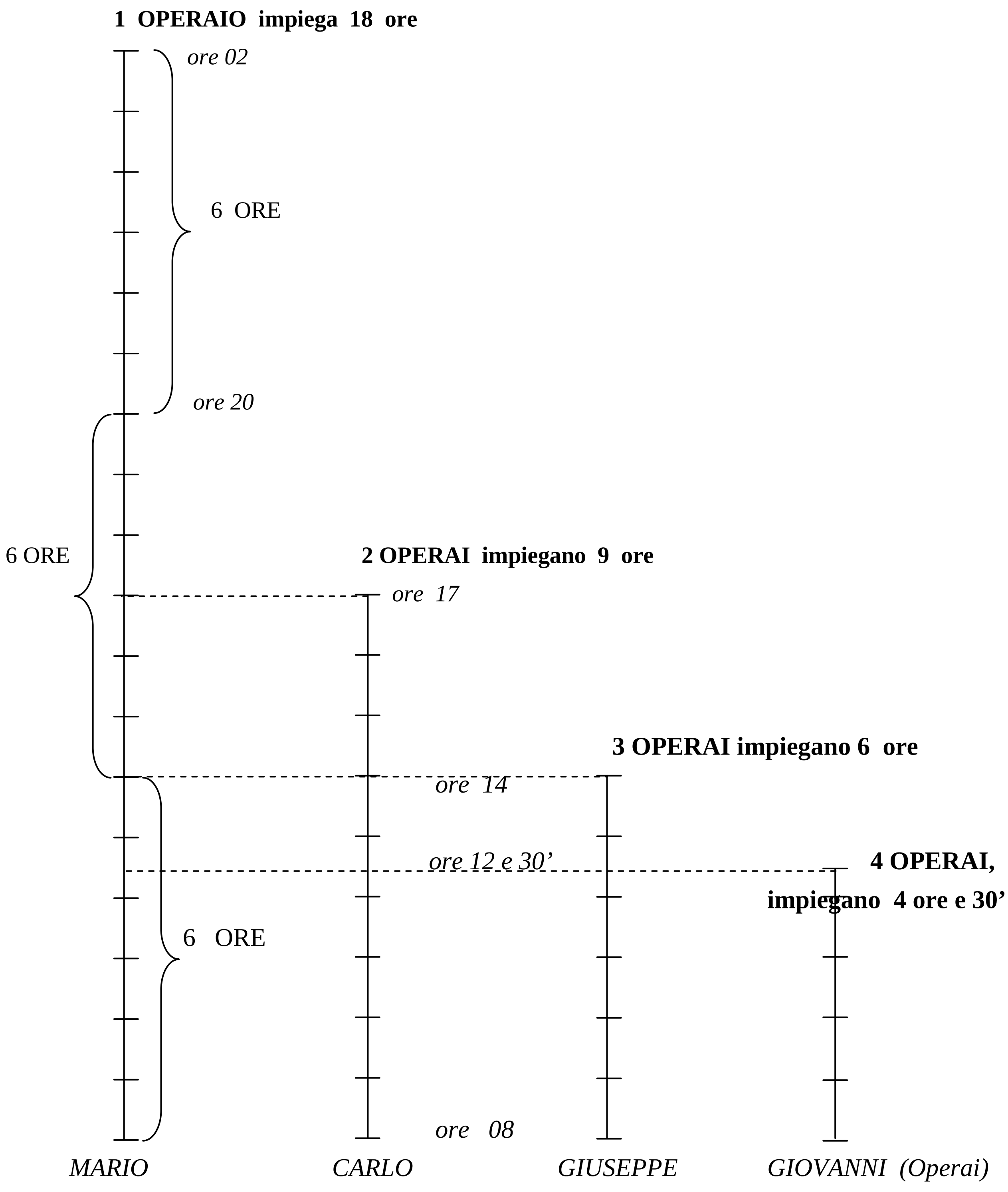
RISOLUZIONE CON IL METODO DELLE ***PROPORZIONI.*** *(Più formale)*

Se il ***numero*** *degli* ***operai*** *diventa* ***doppio, triplo, quadruplo,*** *il* ***tempo occorrente*** *per fare lo stesso lavoro diventa* ***la metà, la terza parte, la quarta parte****, ecc....Perciò la quantità di* ***operai*** *ed* ***il tempo*** *occorrente per fare uno stesso lavoro sono* ***inversamente proporzionali.***

numero degli operai	***ore occorrenti***
↓ ***3***	***6*** ↑
2	***x***

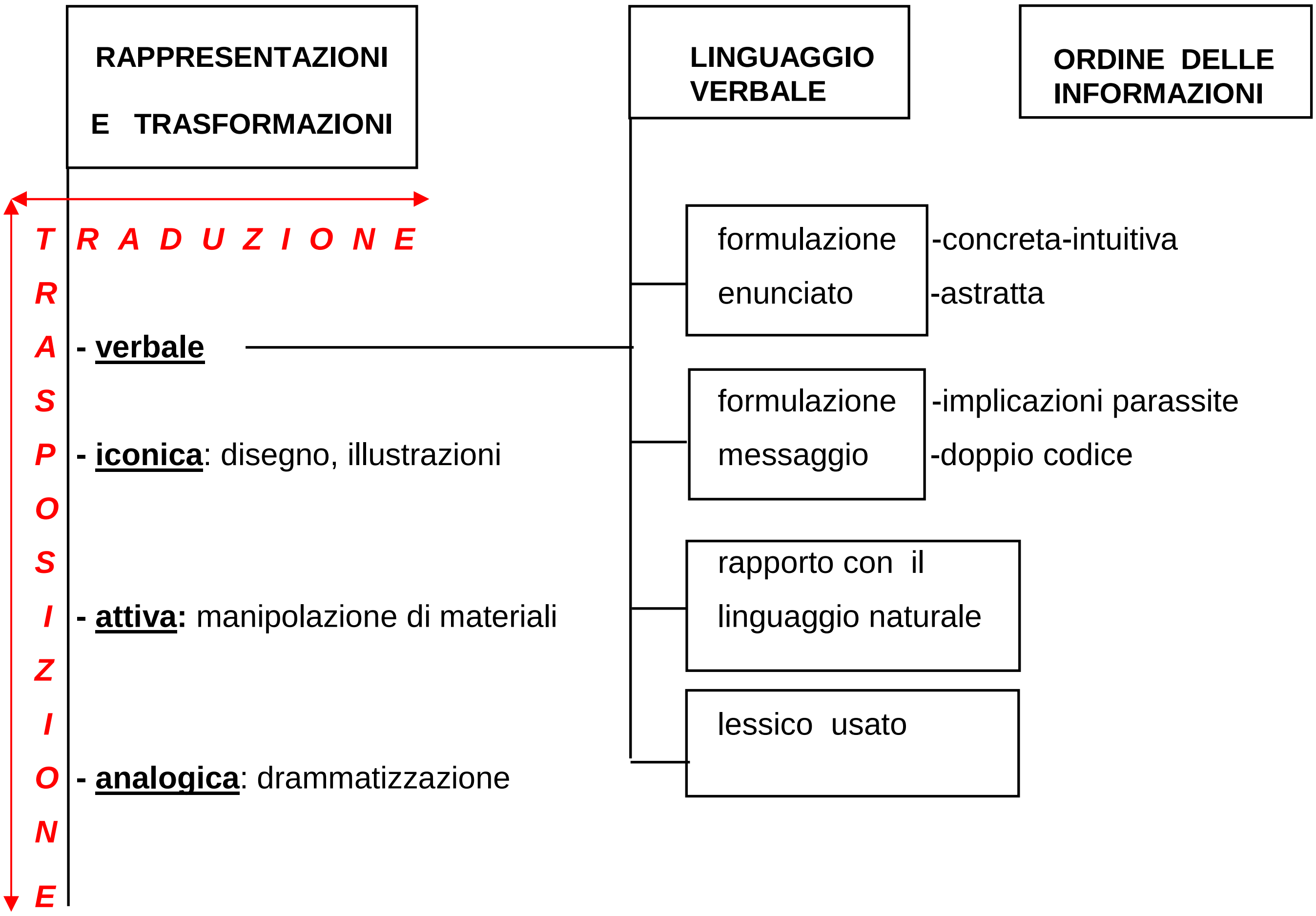
$$3 : 2 = x : 6$$
$$x = 6 \times 3 : 2 = 9$$

RAPPRESENTAZIONE   GRAFICA



Il grafico fa intuire il diagramma della proporzionalità inversa, e cioè il **ramo di iperbole.**

FATTORI CHE INFLUISCONO SULLA COMPRENSIONE DI UN PROBLEMA



<u>TRADUZIONE</u> *da una rappresentazione ad un'altra dello* ***stesso tipo o livello.***

<u>TRASPOSIZIONE</u> ***da un tipo*** *o* ***livello*** *di rappresentazione ad* ***un altro, più concreto o più astratto.***

FATTORI CHE INFLUISCONO SULLA COMPRENSIONE DI UN PROBLEMA

DATI NUMERICI

- -inutili presenti
  -utili assenti
- -in cifre
  -in parole
- -piccoli
  -grandi

OSTACOLI INTUITIVI

- ADDIZIONE
  Ho perso 4 figurine. Ora ne ho 7.
  Quante ne avevo prima?
- SOTTRAZIONE
  Quanto devo aggiungere a 3
  per avere 8?
- MOLTIPLICAZIONE
  m 1 di soffa costa 10 euro.
  Quanto costano m 0,7?
- DIVISIONE
  Alla velocità di 0,75 Km/h,
  quanto tempo impiego
  per percorrere 5 Km ?

Rielaborato da ***Elena Valenti****,*
*”***La matematica nella nuova scuola elementare***”, Le Monnier*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

E.Valenti, "*La matematica nella nuova scuola elementare*", Le Monnier.

Emma Castelnuovo, "*Didattica della matematica*", La Nuova Italia

D.Corno-G. Pozzo, "*Mente, linguaggio, apprendimento*", La Nuova Italia

Mussen-Conger-Kagan, "*Linguaggio e sviluppo cognitivo*", Feltrinelli

Guido Petter, "*Psicologia e scuola primaria*", Giunti

Mosconi-D'urso, *"La soluzione dei problemi",* Giunti-Barbera '73.

Bruno D'Amore, *"Problemi. Progetto Ma.S.E.",* Franco Angeli '96

B. D'Amore -I. Marazzani, "*Problemi nella scuola primaria*", Pitagora '03

Hans Freudenthal, "*Ripensando l'educazione matematica*", La Scuola '94.

Keith Devlin, "*L'istinto matematico*", Raffaello Cortina '07

M. Castoldi, "*Insegnamento* ***muro*** *e* ***ponte***", L'Educatore, n°1, '08/'09

E. Fishbein, *Ostacoli intuitivi nella risoluzione dei problemi*, in UMI, "Numeri e operazioni nella scuola di base", Zanichelli '85.

Sergio Vallortigara - B. Pea - G. Faccio, "*Le storie del maestro Sergio. Il problem solving*", ed. Vannini '07

Vedi altri esempi e problemi in

FRAZIONI

GEOMETRIA COSTRUTTIVA

ROMPICAPO