

# Periodico di matematiche



Organo della  
**MATHESIS**

*Società italiana di scienze  
matematiche e fisiche  
fondata nel 1895*

Numero 1 Gen-Apr 2010

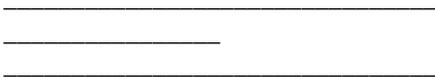
Volume 2 Serie XI

Anno CXX



## Indagine Matmedia 2009

### La Prova di Matematica nei Licei Scientifici Italiani



## Indice

<i>Ringraziamenti</i>	“ 13
<i>Indagini nazionali ed internazionali sull'apprendimento della matematica</i>	“ 14
<i>Testi delle prove, Testo del questionario, Circolare Ministeriale</i>	“ 25
<i>I Commenti delle Commissioni sulla prova</i>	“ 31
<i>Risultati analitici dell'indagine</i>	“ 51
<i>L'indagine 2009: commenti e riflessioni</i>	“ 65
<i>I contenuti della prova di esame: di anno in anno, una cinquina al lotto?</i>	“ 70
<i>Problematiche emerse dall'analisi dei commenti dei commissari</i>	“ 77
<i>I Commenti dei docenti su Matmedia</i>	“ 87
<i>Un SYLLABUS per la prova scritta agli esami di stato</i>	“ 89

*Una parte consistente del presente fascicolo del Periodico è dedicata ai risultati della indagine nazionale sulla prova scritta di matematica agli esami di stato di liceo scientifico (sia di ordinamento che sperimentali) della sessione 2009. Una rilevazione che è stata possibile grazie al sostegno della Facoltà di Ingegneria della Seconda Università di Napoli che ha fornito il supporto tecnico necessario alla raccolta in rete dei dati, attraverso il servizio [www.matmedia.it](http://www.matmedia.it), e ne ha curato la successiva elaborazione.*

*Un lavoro che è durato un intero anno e impegnato più persone: dalla preparazione dell'indagine (Salvatore Venticinque e Angelo Ambrisi) alla fase dell'elaborazione realizzata attraverso l'intensa e sintonica collaborazione degli esperti del gruppo attivato dal prof. Michele Di Natale, preside della Facoltà. Del gruppo hanno fatto parte, coordinati da Francesco De Giovanni: Ferdinando Casolaro, Maria Coccozza, Michelangelo Di Stasio, Massimiliano Giorgio, Annamaria Piccirillo, Anna Maria Pezone, Alessio Russo, Enza Russo, Gabriella Sgueglia, Salvatore Venticinque.*

*La Mathesis ringrazia il gruppo di lavoro e la Facoltà d'Ingegneria di Aversa.*

L'iniziativa di "indagare" sui risultati della prova scritta di matematica agli esami di stato dei licei scientifici è stata attuata attraverso il servizio "matmedia" dal 2001. L'articolo che segue (già pubblicato sul Notiziario dell'UMI, 2006) è relativo alla presentazione dei risultati della sessione d'esame 2005 e si ripropone quale riferimento "storico" del lavoro svolto.

## 1 Indagini nazionali ed internazionali sull'apprendimento della matematica

### 1.1 Cultura della valutazione

Valutazione degli apprendimenti e, più in generale, Cultura della valutazione sono oggi al centro di discussioni e programmi politici perché rese essenziali dalle trasformazioni del nostro sistema di istruzione e in primo luogo dal fatto che non ci sono più Programmi Ministeriali ma solo Indicazioni Nazionali.

Questo significa che il programma d'insegnamento cui eravamo abituati, il passo dopo passo di ciò che era prescritto che si insegnasse di matematica (scanditi per anno o, come è stato dal 1979 in poi, *per temi*) non esiste più.

È un cambiamento che è seguito alla *Autonomia scolastica* (L.59/97, art.21) e alla sua regolamentazione attraverso il D.P.R. 275/99 che all'art. 8 stabiliva, appunto, che i programmi d'insegnamento non fosse più il Ministero a dettarli ma le scuole a costruirseli (quindi: il docente).

Quali i riferimenti? Sulla base di *Indicazioni Nazionali* date dal ministero che, al loro interno, prescrivono le conoscenze e le abilità che è essenziale che i giovani acquisiscano a conclusione di un determinato ciclo di istruzione (O.S.A.) e il cui raggiungimento il sistema nazionale dell'istruzione e della formazione deve garantire. Come assicurarsi che nelle scuole primarie e secondarie della penisola si siano effettivamente raggiunti tali traguardi formativi? Ecco dunque l'INVALSI: Istituto nazionale per valutazione del sistema educativo d'istruzione e di formazione. Il raggiungimento degli (O.S.A.) è periodicamente testato dall'INVALSI attraverso indagini nazionali.

Lo strumento utilizzato, per la matematica, è quello dei quesiti a scelta multipla. Come sono costruiti gli item di un test, che cosa chiedono e cosa mirano di accertare sono certamente questioni che interessano il docente e con le quali egli deve avere oggi una dimestichezza maggiore che in passato.

L'insieme di tali modifiche normative delineano perciò quale formazione (quella iniziale è stata, tra l'altro, affidata interamente alle università) si richiede e cioè:

- a) il docente in grado di gestire il suo sapere per costruirsi il programma
- b) il docente esperto nella verifica, accorto alla valutazione degli esiti e aperto al confronto.

Le indagini si pongono dunque come essenziali ma sono anche una caratteristica dei tempi. Facilitate dallo strumento informatico possono comportare anche, come utile conseguenza, quella di conferire una *dimensione collettiva alla riflessione pedagogica*. La verifica degli apprendimenti su ampia scala e la riflessione costante e collettiva sui risultati dell'apprendimento sono dunque aspetti particolarmente positivi da perseguire anche al di fuori delle indagini ufficiali, perché:

- assegnano allo studente (“cosa” apprende e “come utilizza” ciò che ha appreso) la giusta centralità,
- danno completezza al discorso pedagogico (aggiungendo alla riflessione l'insegnamento e le sue modalità quella sull'apprendimento e i suoi esiti),
- conferiscono concretezza al lavoro del docente impegnato nel raggiungimento di precisi obiettivi condivisi.

## 1.2 Le Indagini

Le indagini su ampia scala che hanno costituito oggetto di mobilitazione dell'informazione sono le due a livello internazionale, I.E.A. e PISA-OCSE e quella nazionale dell'INVALSI. Su un piano più ridotto si colloca poi l'indagine pure nazionale sugli ESAMI DI STATO che offre però elementi di giudizio non meno importanti e significativi.

L'I.E.A. (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*) è la prima nata. Il lancio dello Sputnik, 4 ottobre 1957, aveva significato l'avvio di una competizione tra Est e Ovest sul piano della ricerca e della formazione scientifiche.<sup>1</sup> L'Occidente avviò un processo di ammodernamento dei sistemi scolastici con la matematica che vi assumeva, insieme alla lingua, una importanza centrale. Si aprì una delle fasi più feconde di riflessione pedagogica sulla matematica ove un posto di rilievo avevano le discussioni sull'aggiornamento dei programmi di insegnamento focalizzate da una parte sui contenuti, –in particolare l'introduzione di nuovi argomenti (*insiemi e strutture, trasformazioni geometriche, vettori, statistica, probabilità, ecc.*)<sup>2</sup>–

<sup>1</sup> E. Ambrisi, *Il profitto in matematica: commenti e primi risultati di una indagine* in ATTI società MATHESIS, Cattolica 1982. Il lavoro scaturì dalla collaborazione della Mathesis con l'allora facoltà di Magistero dell'Università di Roma ed in particolare con il prof. Mauro Laeng responsabile tecnico per l'Italia dell'IEA.

<sup>2</sup> Gli anni '70 e '80 del secolo scorso hanno costituito in Italia un vero periodo d'oro per la didattica della matematica perché caratterizzati da un'ansia di cambiamento e rinnovamento molto diffusa e che aveva a protagonisti personaggi anche del mondo accademico ma soprattutto un numero notevole di

dall'altra sui metodi, in particolare la distinzione tra *ordine genetica* (Polya) e *ordine psico-genetico* (Bourbaki-Piaget).

È del 1997 la prima indagine del P.I.S.A. (*Programme for International Student Assessment*). Le successive nel 2000 (centrata sulla lingua), 2003 (matematica). La prossima quest'anno, il 2006, centrata sulle scienze. Il clima del P.I.S.A. è diverso: con il grande evento della caduta del muro di Berlino (9 novembre 1989) il mondo è aperto alla globalizzazione. La democrazia sembra essersi installata in ogni parte del mondo e ciò che appare importante è imparare a saperla vivere e saperne fruire. Educare il cittadino di domani è lo scopo principale che storici e politologi (ad esempio, *F.Fukujama*<sup>3</sup>) assegnano alle Società. Le discussioni non attengono più a metodi e contenuti e al loro aggiornamento quanto alla delineazione delle conoscenze che dovrebbero essere essenziali per essere buoni cittadini. L'attenzione è dunque rivolta ai processi di matematizzazione (che è poi la filosofia di *H.Freudenthal* e anche la filosofia del P.I.S.A.) e le indagini mirano ad accertare le competenze degli alunni quindi cenni nel risolvere problemi reali.

L'I.E.A. e il P.I.S.A. hanno dunque finalità diverse e propongono prove diverse: nella prima, è salvaguardata l'opportunità di apprendere, le prove riguardano i programmi di insegnamento e l'efficacia o meno di un sistema scolastico rispetto ad un altro è data dal divario tra quanto prescritto nei programmi e quanto realmente appreso dagli alunni. Nel P.I.S.A. le prove sono problemi legati a situazioni concrete: quello che si chiede è saperne affrontare la risoluzione utilizzando quanto appreso a scuola. Sono obiettivi diversi che comportano anche modelli diversi di educazione matematica.

Nell'una e nell'altra i risultati ottenuti dagli studenti italiani sono stati definiti più che deludenti. Ora può darsi che non sia proprio così; che tali risultati siano anche legati ad altri fattori e non diano un quadro realistico della formazione matematica realizzata nelle nostre scuole, ma in ogni caso è giusto che ne scaturisca una rinnovata attenzione alla matematica e alla riflessione pedagogica in particolare sul tipo di prove e di richieste di conoscenze e competenze varie. Ecco perché si ritiene di dover volgere uno sguardo ai risultati della prova scritta di matematica nei licei scientifici dove è certamente forte la motivazione degli studenti e sempre più elevato il loro numero.

### 1.3 Gli esami di stato: la prova scritta

Dal 2001 la prova scritta ha avuto una nuova struttura, articolata in problemi e quesiti. Dallo stesso anno 2001 è stata realizzata, curata da ispettori tecnici, una

---

insegnanti di grande valore. Oggi la situazione è decisamente mutata: si redigono anche nuovi O.S.A. ma senza alcun dibattito o confronto, con un lavoro che è di "esperti" non meglio qualificabili e che difficilmente coinvolge insegnanti che quotidianamente respirino l'aria delle aule ragionando con i loro alunni.

<sup>3</sup> F. Fukujama, *La fine della storia e l'ultimo uomo*, Rizzoli, 1992

indagine nazionale sui risultati della prova. Dal 2001 il sito [www.matmedia.it](http://www.matmedia.it) che ha ospitato l'indagine si è posto come sito di riferimento per docenti ed alunni offrendo riflessioni, critiche, indici di difficoltà. Nell'arco degli ultimi cinque anni è stato fatto, quindi, un lavoro abbastanza coordinato. Volgere l'attenzione a questo lavoro ed esaminarne i diversi aspetti può essere importante perché:

- gli esami di stato costituiscono un momento della vita scolastica che è particolarmente rilevante sul piano intellettuale e sociale,
- li sostengono un numero di giovani che oscilla da alcuni anni intorno al mezzo milione e di questi, un quinto circa affronta la prova scritta di matematica,
- i licei scientifici sia di ordinamento che sperimentali costituiscono l'indirizzo di studi dove l'insegnamento della matematica ha maggiore rilevanza e dove gli allievi possono meglio sviluppare le loro propensioni per la disciplina. I traguardi di conoscenze e competenze raggiunti a conclusione di tale indirizzo di studio possono rappresentare un utile riferimento sia per i confronti con altri indirizzi di studio sia anche per delineare ciò che è essenziale in termini di apprendimento.

L'indagine 2005 chiude un quinquennio di esperienze e si sostanzia anche dei pareri della maggioranza dei docenti in servizio nei licei interessati. Non ne emerge una situazione rosea, ma neppure una situazione tanto deludente soprattutto nel confronto con quelli che sono i risultati dei giovani che concludono gli analoghi indirizzi di studio in altri Paesi sviluppati, visto che le prove assegnate non sono molto diverse delle corrispondenti prove assegnate all'estero.

Quello che emerge è l'indicazione di una via per il miglioramento, una via che si è già imboccata e che consiste nel precisare meglio che cosa si vuole che i giovani sappiano e impegnarsi per renderne consapevoli e partecipi i docenti offrendo loro tutta l'attenzione e il supporto che il difficile compito dell'insegnamento merita.

L'indagine 2005 conta sulla partecipazione di 1861 commissioni d'esami operanti in tutto il territorio nazionale e sui dati riguardanti 38972 studenti dei quali 36557 della scuola statale, su un totale di 81550.<sup>4</sup>

Complessivamente quasi il 50% degli impegnati e, dunque, informazioni attendibili su aspetti fondamentali quali: la preparazione con la quale gli alunni hanno affrontato la prova e il tipo di competenze acquisite; gli argomenti ritenuti essenziali e trattati in classe e quelli tralasciati, i risultati conseguiti dagli alunni e i pareri espressi dai docenti.

Ne discende una descrizione, sufficientemente precisa e completa, dello stato della matematica nei licei scientifici con riguardo sia alle preferenze degli insegnanti, a quello che insegnano e come lo insegnano, sia a ciò che è appreso dagli allievi.

---

<sup>4</sup> 20380 nell'ordinario, 12145 nel PNI, 6447 nelle altre sperimentazioni. I dati dell'indagine sono consultabili su: [www.matmedia.it](http://www.matmedia.it)

È fondamentale a questo punto considerare le prove assegnate (Allegato A). Si può dire, come fa qualcuno, genericamente, che il loro livello, rispetto agli anni passati, è calato e si può dire, come non pochi docenti, che sono troppo elevate e che chi le redige non vive la realtà delle aule, non la conosce e non conosce le difficoltà che si incontrano a insegnare ai giovani di oggi.

Quello che è innegabile però - e appare sufficientemente condiviso - è che se i giovani sono in grado autonomamente di risolvere quelle prove allora si può essere, come uomini di scuola, soddisfatti e appagati. Nessuno potrebbe dire che sono degli sprovveduti. Posseggono, al contrario, una preparazione corrispondente a quelle che sono le finalità del liceo e una preparazione che consente loro di proseguire gli studi, anche in facoltà scientifiche, con profitto. Allora, quanti giovani hanno avuto la sufficienza? Sono stati il 67,69%, l'anno scorso un po' di più: il 74,7%. Una diminuzione, quindi! Quale la causa? Sono forse diminuiti gli alunni bravi? Non è questo. Non è né un fatto di annata, di alunni cioè meno portati per la matematica, né la conseguenza di un compito più difficile quanto piuttosto la conseguenza di un maggior rigore nella valutazione dovuto al consolidamento del docente di classe nel ruolo di commissario d'esame (lo scorso anno, il 2004, si ricorderà, si visse la novità delle commissioni tutte interne per ragioni dovute alla legge finanziaria dello Stato). Il risultato non è male, anzi! Anche il numero dei compiti valutati con i punteggi più elevati (14 e 15) è diminuito rispetto allo scorso anno (dal 5,5% al 3,5%). Ma rimane il fatto che il 68% circa ha riportato un voto positivo.

Veniamo ora agli aspetti specifici delle richieste del compito

Le attese della stragrande maggioranza dei docenti sono per lo *studio di funzioni* e per quesiti sulle questioni fondamentali dell'Analisi matematica; questo è il nucleo comune di quello che viene insegnato nel quinto anno del liceo e che si è andato sempre più consolidando nell'arco dell'ultimo trentennio. Ciononostante lo studio della funzione, proposto quest'anno - la stessa funzione sia per l'indirizzo di ordinamento che per gli indirizzi sperimentali - non ha riscosso tanto successo e meno ancora nel PNI. La spiegazione della mancata scelta è, con molta probabilità, nella presenza della richiesta di *dimostrazioni*; dimostrare la *continuità e la derivabilità in un punto* della funzione assegnata. Le *dimostrazioni* sono poco gradite e l'interesse degli alunni, secondo i docenti, appare sempre più circoscritta ai "*come si fa*" e meno rivolto a conoscere i "*perché*".<sup>5</sup>

Difficili dunque le questioni e i quesiti che si allontanano dallo standard con richieste che vanno al di là dell'esercizio di mera applicazione di concetti o procedure. È il caso, ad esempio, del punto 5 del primo problema per gli indirizzi sperimentali: un docente ha scritto: "*Non si trova sui libri di testo...*". La *geometria delle trasfor-*

<sup>5</sup> Il compito assegnato è analogo a quello che da qualche anno costituisce la prova d'esame nei licei scientifici francesi. Il primo problema proposto è invece analogo a quello assegnato negli Stati Uniti. In entrambi i Paesi ci sono varie pubblicazioni che riportano l'organizzazione e gli argomenti della prova che in genere, per alcuni anni, attengono a uno stesso ambito tematico.

mazioni, il calcolo combinatorio e la statistica e probabilità rimangono ancora troppo poco sviluppate in classe e, forse, non patrimonio di tutti gli insegnanti. Un docente ha scritto “Assolutamente inutili i quesiti e le domande sulle trasformazioni geometriche: è matematica minore. . .” il parere dei docenti ha toccato anche il problema delle formulazioni; con riferimento al primo problema, ad esempio, un docente ha scritto che “non è conveniente iniziare con un integrale”, altri hanno manifestato gradimento per “la corda che dimezza l’area”.

### Indirizzo Ordinario

Quesiti	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
	n	%	n	%	%	%
1° sezione aurea	1451	7,12	244	16,82	2,26	55,53
2° lattina	5836	28,64	150	2,57	1,72	4,73
3° tangente	13626	66,86	988	7,25	6,34	2,58
4° rettangoli isoperimetrici	15663	76,85	4766	30,43	28,14	0,86
5° il numero di Nepero	12263	60,17	621	5,06	5,05	2,26
6° n! e coeff. Binomiali	6862	33,67	373	5,44	3,11	8,06
7° $f(k)=2$	8710	42,74	1099	12,62	4,51	6,02
8° cubo e ottaedro	5550	27,23	238	4,29	1,93	11,39
9° trigonometria	13023	63,90	5676	43,58	40,82	1,07
10° funzione costante	13223	64,88	755	5,71	6,12	7,52

### **Legenda**

**A** = numero di candidati che hanno svolto il quesito

**B** = percentuale di candidati che hanno svolto il quesito

**C** = numero di candidati che hanno svolto completamente e correttamente il quesito

**D** = percentuale di candidati che hanno svolto completamente e correttamente il quesito

**E** = percentuale di docenti che hanno giudicato il quesito come il più facile

**F** = percentuale di docenti che hanno giudicato il quesito come il più difficile

I quesiti riguardano argomenti diversi ed in genere coprono un’ampia parte dei programmi. Le tabelle ne illustrano i risultati: il numero degli alunni che ne hanno affrontato la soluzione e a fianco il giudizio dei docenti sia sulle difficoltà che i quesiti presentano sia sull’importanza o essenzialità delle conoscenze e competenze che essi toccano. I dati rivelano quanto poco siano graditi i quesiti di geometria sia piana che solida (quesiti 1 e 8).

Sono i quesiti 4-3-10-9-5 quelli più affrontati dagli allievi perché apparsi più familiari. Il 9 è quello che i docenti hanno definito il più semplice: è uno dei quesiti

proposti lo scorso anno nelle prove valide ai fini dell'orientamento per l'iscrizione alle facoltà d'ingegneria.

### Indirizzo PNI

Quesiti	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
	n	%	n	%	%	%
1° sezione aurea	1045	8,60	51	4,88	1,7	41,9
2° retta tangente	9698	79,85	982	10,13	22,3	1,3
3° trasformazioni geometriche	1268	10,44	100	7,89	0,8	20,5
4° lattina di superficie Minima	7589	62,49	1263	16,64	12,6	1,3
5° il numero di Nepero	4412	36,33	291	6,60	2,3	7,3
6° trasformazioni geometriche	6684	55,03	1345	20,12	14,8	2,3
7° $n!$ e coeff. Binomiali	7494	61,70	756	10,09	12,0	1,0
8° equazioni parametriche	8014	65,99	2606	32,52	21,3	1,0
9° probabilità	6920	56,99	577	8,34	8,8	5,2
10° OCSE PISA	4271	35,17	308	7,22	3,3	18,1

### Legenda

**A** = numero di candidati che hanno svolto il quesito

**B** = percentuale di candidati che hanno svolto il quesito

**C** = numero di candidati che hanno svolto completamente e correttamente il quesito

**D** = percentuale di candidati che hanno svolto completamente e correttamente il quesito

**E** = percentuale di docenti che hanno giudicato il quesito come il più facile

**F** = percentuale di docenti che hanno giudicato il quesito come il più difficile

Le tabelle evidenziano altresì i seguenti fatti:

1. Il quesito in assoluto meno svolto dagli alunni e ritenuto dai docenti il più difficile è stato il primo: lo hanno affrontato in pochi, complessivamente lo 0,7% ripartito equamente negli ordinari, nel PNI, nelle altre sperimentazioni. Riguardava la *sezione aurea* e il fatto che il *seno* di 18 gradi (sessagesimi) è la metà del numero d'oro.  
La spiegazione addotta è che si tratta di una questione di geometria trattata nel biennio e che, in genere, non si ripiglia più neppure per far vedere che il  $\sin 18^\circ$  è ... Eppure è innegabile l'elevato valore culturale che si annette alla *sezione aurea*.
2. Tra i più ostici e meno affrontati c'è anche il seguente quesito:  
*Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della*

*popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni?*

Non è stato proposto a tutti ma solo negli indirizzi sperimentali e di PNI che hanno nei programmi d'insegnamento la statistica e la probabilità. In verità gli strumenti matematici richiesti sono abbastanza poveri: al PNI l'hanno affrontato il 35% ma, per i docenti valutatori, solo un'esigua minoranza, il 7% l'ha risolto correttamente.

Il risultato è particolarmente significativo perché si tratta di uno dei quesiti di matematizzazione proposti dal *PISA/OCSE* per gli alunni quindicenni.

Il quesito si trova tra gli esempi forniti dagli esperti per spiegare che cos'è il *PISA/OCSE*, quale ne è la filosofia ispiratrice, quale lo "sviluppo delle idee chiave" che sono: *quantità, spazio e forma, cambiamento e relazioni, incertezza*. Il quesito è proposto come esempio per illustrare l'idea chiave dell'incertezza: *i quindicenni sono portati a considerare l'analisi dei dati e il caso come un tutt'uno*. E in conclusione portati a chiedersi: è possibile? È possibile che l'età media sia 30 anni? Il 60% della popolazione dovrebbe essere un esercito di piccini.

Sono i docenti allora a suscitare le maggiori perplessità, infatti l'hanno giudicato non solo tra i quesiti più difficili da risolvere ma anche tra quelli inerenti a conoscenze non proprio essenziali.

3. Uno dei quesiti più affrontati ha fatto discutere. Riguarda l'indirizzo di ordinamento, quello più consistente e seguito dalla stampa. Il giornale *La Repubblica* aveva titolata "*quesito errato*" dando poi dello stesso una soluzione (non a stampa ma sola in Internet) **errata**. Il giudizio ha avuto da una parte un effetto di trascinamento, taluni hanno trovato modo di spingersi ad osservazioni anche prive di senso, dall'altra, l'indagine lo conferma, ha avuto l'effetto di suscitare un'attenzione e una riflessione che non può non giovare alla qualità dell'insegnamento.

## 1.4 Conclusioni

In conclusione, questa è una parte del lavoro che è stato svolta nel quinquennio 2001-2005. L'obiettivo era quello di contribuire a creare un clima di attenzione e di interesse alla prova scritta di matematica agli esami di stato che è poi in definitiva il tema di ciò che si insegna e ciò che apprendono gli alunni a conclusione dei loro studi secondari e questo non lontano da ciò che si propongono le attività connesse all'IEA, all'OCSE/PISA, all'INVALSI. Un clima di interesse che si è manifestato nella riflessione collettiva non solo sui contenuti della prova - ciò che è essenziale e ciò che lo è meno, ciò che si riesce a fare e ciò che è più ostico - ma anche sulle

formulazioni, sul modo di porre le questioni ed infine anche su questioni elementari della matematica che non sempre godono di una chiara sistemazione didattica.

La speranza è di essere quindi sulla buona strada. Infatti, se il successo della struttura della prova è stato evidenziato già dal primo anno della sua attuazione, le cose sono andate via via rafforzandosi e migliorando facendo apparire realistico l'obiettivo di correlare sempre più la preparazione dei giovani che concludono il loro ciclo di studi di liceo scientifico a quelle conoscenze e competenze matematiche che si ritengono importanti e significative da acquisire in tale indirizzo di studi e - risultato non trascurabile - sempre più omogenea a livello nazionale.

Dopo 5 anni sia i docenti che gli alunni hanno a riferimento una ricca documentazione costituita dai problemi e dai quesiti già proposti. Tale documentazione è certamente utile ai docenti nella preparazione dei loro piani di lavoro e agli alunni dà indicazioni chiare su che cosa e come studiare. È questo un successo non trascurabile e che non ha precedenti perché lega di più la matematica allo studio, la fa finalmente apparire come le altre: una disciplina dove può riuscire chiunque se si studia e ci si prepara.

Allegato A

### Il testo della prova:

#### Il Problema 1 per l'indirizzo di ordinamento

Nel primo quadrante del sistema di riferimento  $Oxy$ , ortogonale e monometrico, si consideri la regione  $R$  delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola  $\lambda$  d'equazione:  $y = 6 - x^2$ .

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di  $R$  attorno all'asse  $y$ .
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di  $R$  attorno alla retta  $y = 6$ ;
3. Si determini il valore di  $k$  per cui la retta  $y = k$  dimezza l'area di  $R$ .
4. Per  $0 < t < \sqrt{6}$  sia  $A(t)$  l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a  $\lambda$  nel suo punta di ascissa  $t$ . Si determini  $A(1)$ .
5. Si determini il valore di  $t$  per il quale  $A(t)$  è minima.

#### Il Problema 1 per l'indirizzo PNI - BROCCA

Nel piano  $Oxy$  sono date le curve  $\lambda$  e  $r$  d'equazioni:

$$\lambda : x^2 = 4(x - y) \quad \text{e} \quad r : 4y = x + 6.$$

1. Si provi che  $\lambda$  e  $r$  non hanno punti comuni;
2. Si trovi il punto  $P \in \lambda$  che ha distanza minima da  $r$ ;
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da  $\lambda$  e dalla retta  $s$ , simmetrica di  $r$  rispetto all'asse  $x$ ;
4. Si determini il valore di  $c$  per il quale la retta  $y = c$  divide a metà l'area della regione  $S$  del I quadrante compresa tra  $\lambda$  e l'asse  $x$ .
5. Si determini il volume del solido di base  $S$  le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse  $x$  sono quadrati.

**Il Problema 2 per tutti gli indirizzi**

(la parte in grassetto solo per il PNI - BROCCA)

Si consideri la funzione  $f$  definita sull'intervallo  $[0, +\infty[$  da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

e sia  $C$  la sua curva rappresentativa nel riferimento  $Oxy$ , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se  $f$  è *continua e derivabile* in 0
2. Si dimostri che l'equazione  $f(x) = 0$  ha, sull'intervallo  $[0, +\infty[$ , un'unica radice reale e **se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte**;
3. Si disegni  $C$  e si determini l'equazione della retta  $r$  tangente a  $C$  nel punto di ascissa  $x = 1$ ;
4. Sia  $n$  un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di  $n$ , l'area  $A_n$  del dominio piano delimitato dalla curva  $C$ , dalla retta tangente  $r$  e dalle due rette  $x = \frac{1}{n}$  e  $x = 1$ ;
5. Si calcoli il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $A_n$  e si interpreti il risultato ottenuto.

**I quesiti nell'indirizzo di ordinamento**

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare  $\sin 18^\circ$ ,  $\sin 36^\circ$ .
2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
3. Si dimostri che la curva  $y = x \sin x$  è tangente a  $y = x$  quando  $\sin x = 1$  ed è tangente a  $y = -x$  quando  $\sin x = -1$
4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
5. il numero  $e$  di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)] come si definisce? Perché la derivata di  $e^x$  è  $e^x$ ?
6. Come si definisce  $n!$  ( $n$  fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
7. Se  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$ , per quanti numeri reali  $k$  è  $f(k) = 2$ ? Si illustri il ragionamento seguito.
8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di  $\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ$  ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.
10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione  $f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$  è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

**I quesiti nel PNI e negli indirizzi sperimentali**

( in grassetto le parti comuni)

1. **Si dimostri che il lato del decagono regolare ... è sezione aurea ...**
2. Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, **si dimostri che la curva  $y = x \operatorname{sen} x$  è tangente ...**
3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali  $\sigma$  e  $\varphi$  la cui composizione  $\sigma \circ \varphi$  dia luogo alla traslazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

4. Si determinino poi le equazioni della trasf. che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso.
5. **Una bevanda viene venduta in lattine ...**
6. **Come si definisce e quale è l'importanza del numero  $e$  di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)] ?** Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.
7. Le rette  $r$  e  $s$  d'equazioni rispettive  $y = 1 + 2x$  e  $y = 2x - 4$  si corrispondono in una omotetia  $\omega$  di centro l'origine  $O$ . Si determini  $\omega$ .
8. **Come si definisce  $n!$  ...**
9. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche  $x = e^t + 2$  e  $y = e^{-t} + 3$  nel suo punto di coordinate (3,4).
10. Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?
11. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

EMILIO AMBRISI

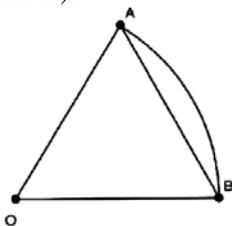
## 2 Testi delle prove, Testo del questionario, Circolare Ministeriale

### 2.1 Testo delle prove per il Corso di Ordinamento

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.*

#### PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare  $AOB$  di raggio  $r$  e ampiezza  $x$  ( $r$  e  $x$  sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti).



1. Si provi che l'area  $S$  compresa fra l'arco e la corda  $AB$  è espressa, in funzione di  $x$ , da  $S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - \text{sen}x)$  con  $x \in [0, 2\pi]$
2. Si studi come varia  $S(x)$  e se ne disegni il grafico (avendo posto  $r = 1$ ).
3. Si fissi l'area del settore  $AOB$  pari a  $100 \text{ m}^2$ . Si trovi il valore di  $r$  per il quale è minimo il perimetro di  $AOB$  e si esprima il corrispondente valore di  $x$  in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia  $r = 2$  e  $x = \frac{\pi}{3}$ . Il settore  $AOB$  è la base di un solido  $W$  le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad  $OB$  sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di  $W$ .

#### PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico  $G_f$  della funzione  $f(x) = \log x$  (logaritmo naturale)

1. Sia  $A$  il punto d'intersezione con l'asse  $y$  della tangente a  $G_f$  in un suo punto  $P$ . Sia  $B$  il punto d'intersezione con l'asse  $x$  della parallela per  $P$  all'asse  $y$ . Si dimostri che, qualsiasi sia  $P$ , il segmento  $AB$  ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico  $G_g$  della funzione  $g(x) = \log_a x$  con  $a$  reale positivo diverso da 1?
2. Sia  $\delta$  l'inclinazione sull'asse  $x$  della retta tangente a  $G_g$  nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base  $a$  è  $\delta = 45^\circ$ ? E per quale valore di  $a$  è  $\delta = 135^\circ$ ?
3. Sia  $D$  la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da  $G_f$  e dalla retta d'equazione  $y = 1$ . Si calcoli l'area di  $D$ .

4. Si calcoli il volume del solido generato da  $D$  nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione  $x = -1$ .

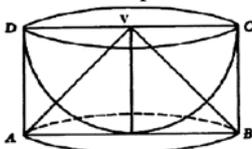
### QUESTIONARIO

1. Si trovi la funzione  $f(x)$  la cui derivata è  $\sin x$  e il cui grafico passa per il punto  $(0, 2)$ .
2. Sono dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ . Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di  $A$  in  $B$ , ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biettive*?
3. Per quale o quali valori di  $k$  la curva d'equazione  $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$  ha una sola tangente orizzontale?
4. “*Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni*”. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{1}{0}; \quad 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Si calcoli:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$
7. Si dimostri l'identità  $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$  con  $n$  e  $k$  naturali e  $n > k$ .
8. Si provi che l'equazione:  $x^{2009} + 2009x + 1 = 0$  ha una sola radice compresa fra  $-1$  e  $0$ .
9. Nei “*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*”, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama scodella considerando una semisfera di raggio  $r$  e il cilindro ad essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice  $V$  in figura.



10. Si determini il periodo della funzione  $f(x) = \cos 5x$ .

## 2.2 Testo delle prove per l'indirizzo PNI-Brocca-Autonomia

*Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.*

### PROBLEMA 1

Sia  $f$  la funzione definita da

$$f(x) = \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) e^{-x}$$

dove  $n$  è un intero positivo e  $x \in \mathbb{R}$

1. Si verifichi che la derivata di  $f(x)$  è:  $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$
2. Si dica se la funzione  $f$  ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando  $n$  è dispari,  $f(x) \leq 1$  per ogni  $x$  reale.
3. Si studi la funzione  $g$  ottenuta da  $f$  quando  $n = 2$  e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli  $\int_0^2 g(x) dx$  e se ne dia l'interpretazione geometrica.

### PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ , si consideri la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x^3 + kx$ , con  $k$  parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di  $f$  al variare di  $k$  ( $k$  positivo, negativo o nullo).
2. Sia  $g(x) = x^3$  e  $\gamma$  il suo grafico. Si dimostri che  $\gamma$  e la retta d'equazione  $y = 1 - x$  hanno un solo punto  $P$  in comune. Si determini l'ascissa di  $P$  approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia  $D$  la regione finita del primo quadrante delimitata da  $\gamma$  e dal grafico della funzione inversa di  $g$ . Si calcoli l'area di  $D$ .
4. La regione  $D$  è la base di un solido  $W$  le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di  $W$ .

### QUESTIONARIO

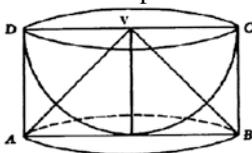
1. Siano:  $0 < a < b$  e  $x \in [-b, b]$ . Si provi che:  $\int_{-b}^b |x - a| = a^2 + b^2$ .
2. Sono dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ . Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di  $A$  in  $B$ , ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biettive*?

3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)
4. “Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni”. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:

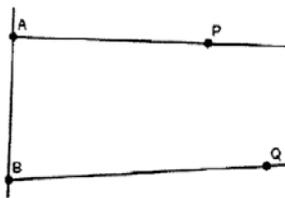
$$\frac{0}{1}; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{1}{0}; \quad 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione  $\sin x = 0$ , con punto iniziale  $x_0 = 3$ . Cosa si ottiene dopo due iterazioni?
7. Si dimostri l'identità  $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$  con  $n$  e  $k$  naturali e  $n > k$ .
8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?
9. Nei “*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*”, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama scodella considerando una semisfera di raggio  $r$  e il cilindro ad essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice  $V$  in figura.



10. “Se due punti  $P$  e  $Q$  del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta  $AB$  e gli angoli  $\widehat{PAB}$  e  $\widehat{QBA}$  hanno somma minore di  $180^\circ$ , allora le semirette  $AP$  e  $BQ$ , prolungate adeguatamente al di là dei punti  $P$  e  $Q$ , si devono intersecare”.



Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.

## 2.3 Il Testo del questionario

### Regione

**Codice Commissione d'esame:**

**Istituto:** Statale / Paritario

**Indirizzo di studi:** Ordinario, PNI-Brocca-Autonomia, Liceo della comunicazione, Altre sperimentazioni

**Numero dei Candidati esaminati dalla Commissione/Classe**

#### **A) Giudizio della Commissione sulle difficoltà incontrate dai candidati nei Problemi:**

- il primo problema è risultato di difficoltà: (molto bassa, bassa, media, alta, molto alta)
- il secondo problema è risultato di difficoltà: (molto bassa, bassa, media, alta, molto alta)
- le eventuali difficoltà riscontrate nel primo problema sono dovute a: (formulazione ambigua, presenza di argomento non svolto o svolto nei primi anni di corso, complessità di impostazione o di calcolo, presenza di richieste troppo elevate)
- le eventuali difficoltà riscontrate nel secondo problema sono dovute a: (formulazione ambigua, presenza di argomento non svolto o svolto nei primi anni di corso, complessità di impostazione o di calcolo, presenza di richieste troppo elevate)

#### **B) Giudizio della Commissione sulle difficoltà incontrate dai candidati nei Quesiti:**

- i quesiti sono risultati mediamente di difficoltà: (molto bassa, bassa, media, alta, molto alta)
- il quesito più facile è stato considerato il n.
- il quesito più difficile è stato considerato il n.
- le eventuali difficoltà riscontrate nei quesiti sono dovute a: (formulazione ambigua, riguarda argomento non svolto o svolto nei primi anni di corso, complessità di impostazione o di calcolo, si tratta di richiesta troppo elevata)

#### **C) Il numero dei candidati assegnati alla Commissione:**

- che hanno affrontato il primo problema
- che hanno affrontato il secondo problema

#### **D) Il numero dei candidati assegnati alla Commissione:**

- che hanno affrontato il primo quesito
- che hanno affrontato il secondo quesito
- che hanno affrontato il terzo quesito
- che hanno affrontato il quarto quesito
- che hanno affrontato il quinto quesito
- che hanno affrontato il sesto quesito
- che hanno affrontato il settimo quesito
- che hanno affrontato l'ottavo quesito
- che hanno affrontato il nono quesito
- che hanno affrontato il decimo quesito

#### **E) Il quesito che ha riscosso le migliori risposte in termini di correttezza e completezza:**

- è stato il numero
- al quale hanno risposto correttamente e completamente n.

#### **F) Il numero degli elaborati giudicati NON SUFFICIENTE:**

- è uguale a:

#### **G) Il numero degli elaborati giudicati SUFFICIENTE:**

- è uguale a:

**H) Il numero degli elaborati cui è stato assegnato il punteggio massimo di 15:**

- è uguale a:

**I) Per la valutazione della prova la commissione ha adottato la griglia proposta dall'USR. (SI/NO)**

**In caso affermativo:**

**L) L'utilizzazione della griglia proposta dall'USR DELLA REGIONE: ..... si è rivelata:** (soddisfacente,abbastanza utile,molto laboriosa,superflua)

**M) L'utilizzazione della griglia proposta ha comportato:** (una maggiore oggettività nella valutazione, la possibilità di confronto con altre commissioni, un limite alla considerazione di altri criteri)

**N) La struttura della prova articolata in problemi e quesiti con possibilità di scelta è da ritenersi** (molto valida, superata nella distinzione problemi/quesiti, non corretta: eliminare la possibilità di scelta)

**O) Le sei ore concesse per il compito sono:** (giuste, eccessive: basterebbero 4 ore, eccessive: basterebbero 5 ore)

**P) eventuale commento sulla prova (max 400 caratteri)**

## 2.4 La Circolare Ministeriale

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca  
Dipartimento per l'Istruzione  
Direzione Generale per gli ordinamenti scolastici e per l'autonomia scolastica  
Struttura Tecnica Esami di Stato

Ai presidenti delle commissioni giudicatrici  
dell'Esame di Stato conclusivo dei corsi di  
istruzione secondaria di II grado Struttura

Roma, 18 giugno 2009

**Oggetto:** Indagine sui risultati della prova scritta di matematica.

Si comunica che anche per il corrente anno 2009, come per le decorse sessioni di esami di Stato, sarà effettuata l'indagine sui risultati della prova scritta di matematica nei licei scientifici, sia di ordinamento che sperimentali. Si pregano pertanto le SS.LL. di voler procedere, per le Commissioni di competenza, alla registrazione dei dati richiesti attraverso il sito <http://www.matmedia.it> dal 29 giugno al 16 luglio.

IL DIRETTORE GENERALE  
Mario G. Dutto

### 3 I Commenti delle Commissioni sulla prova

#### 3.1 Indirizzi di Ordinamento

1. A giudizio degli insegnanti la prova di quest'anno non è apparsa particolarmente difficile se non per alcune particolarità richieste (p. di Cavalieri geometria solida). Per gli studenti è stato però mediamente difficile argomentare con precisione e spaziare su argomenti che hanno coinvolto buona parte del programma del corso di studi. Positiva la brevità dei calcoli a favore di un più mirato impegno di metodo.
2. Abbastanza completo negli argomenti con alcuni punti che richiedono una particolare riflessione e una conoscenza approfondita dell'argomento proposto. Non complicati i calcoli.
3. Abbastanza eterogenea, ma il calcolo combinatorio è sicuramente in più.
4. Adeguata alla preparazione media dei candidati.
5. Adeguata alle capacità degli allievi.
6. Adeguata per un Liceo Scientifico Corso Ordinario.
7. La struttura della prova va bene purché il problema non conduca ad altri 4 quesiti. I quesiti di geometria solida e sui coeff. binomiali sono da eliminare perché fatti così sembrano quiz. A che servono? Nei programmi, di fatto, raramente sono affrontati in maniera adeguata (al tema, non ai quesiti).
8. Adeguata rispetto al corso di studi, inadeguata rispetto alla preparazione degli studenti.
9. Ai candidati non è risultata chiara la dicitura (al terzo punto del probl.1) "perimetro di  $AOB$ " che avrebbe potuto essere confusa con il perimetro del triangolo  $AOB$ . Inoltre non è del tutto chiaro al punto 2 del probl.1 se la funzione  $S(x)$  deve essere studiata in  $[0, 2\pi]$  o in tutto  $R$ . Per quanto concerne i quesiti ce ne sono un paio (i numeri 4 e 9) riguardo ai quali la classe ha palesato di non avere alcuna conoscenza (temi non affrontati).
10. Al fine di tendere verso la massima omogeneità di giudizio possibile tra commissioni diverse, si ritiene utile che il Ministero fornisca assieme al testo della prova anche la griglia di valutazione adeguata e aderente allo scritto medesimo.
11. Durante l'anno scolastico non sempre si riesce a trattare alcuni argomenti oggetto dei quesiti.
12. Alcuni quesiti sono di difficile valutazione.
13. Alcuni quesiti erano troppo immediati o mal posti (per esempio a che livello di profondità andavano argomentati?) Si ritiene necessario indicare una soglia di sufficienza per l'elaborato.
14. Alcuni quesiti risultano essere fin troppo semplici. Altri riguardano invece argomenti poco trattati nel programma svolto dalla maggior parte dei docenti; vedasi per esempio il numero 9 e il numero 4. I problemi appaiono ben strutturati con punti di media difficoltà e indipendenti tra loro.
15. All'inizio dell'anno scolastico dovrebbero essere chiaramente indicati gli argomenti su cui la prova verterà, specificando per ognuno le conoscenze e le competenze richieste dando anche indicazione dei punteggi da attribuire alle singole parti.
16. Ambiguo il testo del quesito 5.
17. Apprezzabile l'indipendenza dei vari punti dei problemi. Sbilanciata la complessità dei quesiti.

18. Bel compito finalmente fattibile, facile da correggere.
19. Bella la prova. Troppi alunni della scuola paritaria non arrivano alla sufficienza. Pochi gli studenti in grado di svolgerla.
20. Ben articolata: la struttura non consequenziale dei problemi è di notevole vantaggio per i candidati. Argomenti pertinenti ai temi affrontati nell'ultimo anno.
21. Ben strutturata con difficoltà graduate e tali da consentire il raggiungimento della sufficienza agli alunni più deboli e con richieste più approfondite e su larga scala per ottenere dagli alunni migliori valutazioni ottime o eccellenti.
22. Classe 5E - sono state riscontrate difficoltà rilevanti nei problemi mentre i quesiti hanno mostrato risultati più positivi.
23. Classe 5B - risultati positivi nei quesiti, risultati limitati nei problemi.
24. Compito di difficoltà ragionevole. Si auspica la fornitura da parte del ministero di un'elenco preciso e dettagliato di argomenti che possano essere utilizzati nella prova d'esame.
25. Compito di normale difficoltà adeguato ai livelli di preparazione media degli studenti. I quesiti erano veramente facili.
26. Dare 2 ore per la risoluzione del problema che stia in una busta diversa da quella dei quesiti. Dopo una pausa di mezz'ora aprire la busta dei quesiti e dare altre 2 ore per il loro svolgimento.
27. Difficoltà medio - bassa.
28. Difficoltà di interpretazione e di impostazione del punto 4 di ciascuno dei due problemi. Il primo problema è risultato più complesso del secondo. La prova anche se impegnativa ha coinvolto un ampio numero di argomenti dando una buona possibilità di scelta.
29. Disparità di difficoltà tra i due problemi.
30. All'inizio dell'anno scolastico dovrebbero essere preventivamente e chiaramente indicati gli argomenti su cui la prova di esame verterà. Dovrebbero essere contestualmente indicate per ogni argomento anche le abilità richieste.
31. È auspicabile una formulazione molto accurata del testo per non disorientare i candidati nella scelta del problema e dei quesiti da risolvere.
32. È necessario aumentare il numero di ore settimanali di insegnamento della Matematica.
33. È opportuno indicare una griglia di correzione unica per tutti senza lasciare la discrezionalità alle commissioni.
34. Eccessiva aleatorietà dei testi in relazione al programma mediamente svolto nei licei; eccessivo riferimento agli argomenti del biennio.
35. Entrambi i problemi proposti presentano almeno una domanda (l'ultima) non standard. Alcuni quesiti sono formulati in modo superficiale (il numero 5), il quesito 9 ha una difficoltà nettamente superiore agli altri.
36. Evitare argomenti svolti nei primi anni di corso ed argomenti di geometria solida. I problemi sono formulati in maniera chiara e non ambigua.
37. Evitare la richiesta esplicita di argomenti relativi ai primi anni di corso. Focalizzare il più possibile i problemi sul programma di quinta (analisi matematica).
38. Fare in modo che i quesiti abbraccino diversi argomenti e che in entrambi i problemi una domanda sia applicazione della matematica alla fisica.
39. Fattibile ed accettabile.
40. Finalmente dopo anni il testo era equo e attinente al programma ministeriale del V anno anche se bisognava comunque avere una cultura di base. Anche il testo della suppletiva era parimenti equo.

41. Finalmente una prova relativa al programma effettivamente svolto.
42. Formulata in modo chiaro - Adeguata al livello di preparazione.
43. Generalmente gli allievi durante l'ultimo anno concentrano la loro attenzione sull'analisi e infatti il compito rispecchiava molto parte del programma dell'ultimo anno. Il quesito sul principio di Cavalieri presupponeva conoscenze di storia della matematica che purtroppo quasi mai viene affrontata.
44. Giudizio prova 2009: buona la scelta dei problemi con richieste graduate e interessanti. Buoni anche i quesiti: anche se qualcuno era banale eppure fonte di errori. Il fattore che continua ad influenzare il rendimento è l'emotività palesata dagli studenti. Capita anche che pur avendo trattato in classe quanto richiesto dal quesito o dal problema, non venga poi riconosciuto/ricordato dallo studente.
45. Gli allievi hanno riscontrato difficoltà nella visualizzazione del solido nel quarto punto del primo problema.
46. Gli alunni affrontano raramente i problemi di geometria dei solidi in quanto difficilmente durante il corso di studi si trova il tempo per trattare tale argomento. Inoltre si ritiene che la durata di 6 ore sia eccessiva e tutto a vantaggio degli studenti non preparati. La griglia proposta dall'USR Puglia per quanto concerne il punteggio da assegnare è stata del tutto condivisa.
47. La formulazione dei quesiti è ambigua e non consente di calibrare la correzione. Non si capisce perché in alcuni casi non vengano chieste le motivazioni o se sia implicito che si debbano motivare le risposte. Il ministero dovrebbe fornire delle soluzioni "ufficiali" data l'ambiguità di alcuni quesiti.
48. Ha consentito di valutare le differenze di preparazione fra i candidati.
49. I problemi risultano strutturati in coerenza con i programmi di un liceo scientifico di ordinamento. Tuttavia si richiede di formulare i testi in modo tale da non creare alcuna ambiguità di interpretazione come nel punto 3 del 1° problema circa il perimetro di *AOB*. I candidati non hanno affrontato i quesiti 7, 8, 9 in quanto riguardano argomenti che, o vengono trattati in modo superficiale o addirittura vengono sorvoltati.
50. I problemi dovrebbero essere circoscritti al programma della classe V.
51. I problemi e i quesiti propongono spesso situazioni geometriche piuttosto complesse rispetto ai programmi di geometria affrontati nel liceo. Al contrario il calcolo integrale che si può trovare in un problema o in un quesito è troppo semplice rispetto ai programmi universitari e agli stessi programmi scolastici.
52. I problemi erano accessibili ed i quesiti forse troppo semplici; si potrebbe farli più corposi facendoli "pesare" 10 punti e semplificare il problema valutandolo 5 punti.
53. I problemi non sono collegati al percorso prevalente della classe quinta. Non si comprendono le motivazioni del calcolo del volume come sezione di una figura solida di difficile rappresentazione (fra l'altro ripetuto nel corso degli ultimi due anni). I quesiti non sono fra loro equivalenti. Alcuni quesiti risultano decisamente elementari.
54. I problemi presentano richieste adeguate ai programmi. La scelta dei quesiti permette di evidenziare sia le conoscenze di tipo curricolare sia la capacità di affrontare problemi di carattere più generale.
55. I problemi proposti erano chiari e ben formulati oltre che abbastanza equivalenti in quanto a difficoltà, tranne che per il punto 4 del problema numero 2 dove si richiede il calcolo del volume del solido.
56. I problemi sono formulati in modo chiaro e non ambiguo. Evitare solo calcoli molto lunghi

- ed argomenti svolti nei primi anni di corso come ad esempio la geometria solida.
57. I problemi sono risultati più semplici rispetto agli altri anni, soprattutto il primo anche se nessuno o quasi l'ha svolto. I quesiti sono risultati non tutti risolvibili, soltanto 5 al max.
  58. I problemi sono stati calibrati in modo da presentare sostanzialmente lo stesso grado di difficoltà. Gli alunni nella quasi totalità hanno scelto il primo problema in quanto ne hanno superato facilmente il primo punto. In merito ai quesiti questi sono risultati facilmente risolvibili in quanto strettamente attinenti ai programmi svolti.
  59. I problemi sono stati impostati in modo chiaro. Bisogna evitare argomenti come la geometria solida o il calcolo combinatorio e la statistica in quanto le tre ore settimanali per classe nel triennio sono completamente insufficienti a svolgere questa parte della matematica e gli studenti sono completamente impreparati su tali argomenti.
  60. I punti 2 e 4 del problema sono mal posti; il problema 2 è facile e non permette di verificare le conoscenze del 5° anno di liceo, salvo per gli integrali. I quesiti 1, 5, 10 sono molto semplici al punto che i candidati non hanno dato alcuna spiegazione.
  61. I quesiti e il problema sono in linea con i programmi, ma il problema, pur accessibile, ha riscontrato difficoltà nella elaborazione.
  62. I quesiti non sono graduati per difficoltà. Accanto a quesiti molto semplici sono presenti quesiti di alta difficoltà.
  63. I quesiti proposti consentono di valutare in modo preciso la preparazione. Il ministero deve adeguare i programmi ai quesiti che propone alla maturità.
  64. I quesiti proposti non sono equivalenti tra loro nel grado di difficoltà. Il quesito n. 10 ad esempio è risultato banale e, poiché nel testo non veniva richiesta esplicitamente una giustificazione della risposta, molti studenti si sono limitati a scrivere correttamente il periodo della funzione. Tale quesito non è paragonabile al quesito n. 9 che nessuno studente della classe ha affrontato, semplicemente perché l'argomento non era stato trattato in classe, ma la sua risoluzione avrebbe comunque richiesto una trattazione ben più articolata di quella del n. 10.
  65. I quesiti proposti sono stati troppo banali. Questo ha disorientato gli alunni in quanto essi non hanno saputo motivare la risposta talvolta troppo ovvia, es. q. 5 e q. 10. Tali quesiti risultano formulati come TEST e non come esercizi.
  66. I quesiti sono risultati di difficoltà molto diversa tra loro. Pertanto gli studenti risolvono solo i più semplici creando quindi una difficoltà di valutazione complessiva.
  67. I quesiti spaziano su argomenti troppo vasti trattati in anni precedenti o che non sempre si riesce a ripassare.
  68. I temi sono abbastanza completi nelle conoscenze richieste e non necessitano di calcoli troppo complessi. Per il primo quesito del primo problema occorre molta attenzione, il secondo era ambiguo.
  69. Il 4° sottoquesito del primo problema non riguarda contenuti che fanno parte del programma ministeriale.
  70. Il compito potrebbe essere meno complesso e fattibile, quindi in meno ore.
  71. La Commissione ritiene che la prova fosse in linea con quanto svolto normalmente in un piano di studi di un liceo scientifico di ordinamento e come tale non avrebbe dovuto presentare particolari difficoltà da parte dei candidati.
  72. Il lavoro presentato, per come sono stati posti sia i relativi problemi sia il questionario, riesce ad evidenziare in maniera chiara sia l'assimilazione dei contenuti del programma svolto che le competenze acquisite dai discenti nel loro percorso formativo.

73. Il primo problema è risultato più impegnativo di quelli proposti nella prova del PNI e il secondo ANCHE! Questo naturalmente a parità di preparazione, ma se si considera che nel tradizionale ci sono tre ore settimanali contro le cinque del PNI, il confronto si fa stridente. Con questo non voglio dire che questo compito fosse troppo difficile (la classe in questione aveva una storia travagliata) ma che quello del P.N.I. era banale e tradiva il senso della sperimentazione.
74. Il problema 1 richiede competenze di trigonometria che i ragazzi affrontano al III anno. Il 4° punto del problema 2 non è previsto dai programmi. Il quesito 5 è ambiguo, il quesito 9, quello sulla geometria solida, complesso perché non si riesce a svolgere questa parte di programma. Le ore di matematica sono insufficienti.
75. Il quarto punto del primo problema si è rivelato particolarmente complesso.
76. Il quarto punto del problema n. 1 non è stato preso in considerazione durante la correzione in quanto l'argomento non è stato esplicitamente trattato nel programma svolto.
77. Il quarto quesito dei due problemi è risultato poco chiaro e/o troppo complicato.
78. Il quesito del problema 2 richiede conoscenze che non sono oggetto dei programmi ministeriali per un liceo scientifico ordinario. Gli argomenti di geometria solida, di calcolo combinatorio e di storia della matematica non si riescono molte volte ad affrontare nelle ore di lezione previste per la matematica nel triennio.
79. Il quesito n° 5 ha diverse possibili risposte da giustificare. Risulta perciò in generale necessario associare al testo della prova sia dei criteri di valutazione (meglio se basati sulla somma dei punteggi attribuiti preventivamente a ciascun problema o quesito) che la soluzione di ciascun tema proposto almeno per capire quale tipo di risposta e quale approfondimento si aspettano gli estensori.
80. Il quesito numero 5 ha una formulazione poco chiara.
81. Il tema dovrebbe essere maggiormente attinente agli argomenti svolti nell'ultimo anno.
82. Il testo del compito è assolutamente adeguato. I problemi sono risultati difficili per alcuni per carenze di preparazione. La griglia adottata è risultata più generosa di quella USR, ciononostante si sono registrate molte insufficienze. Nessuno ha trattato completamente un problema. Sono presenti 5 privatisti.
83. Il testo del primo problema presenta alcuni punti non chiari. Domanda 2:  $S(x)$  è da ritenersi in  $[0, 2\pi]$  o in  $R$ ? Domanda 3: converrebbe specificare che il perimetro di  $AOB$  si deve intendere come perimetro del settore circolare  $AOB$ . Il quesito 7 contiene un errore: deve essere  $n > k + 1$ .
84. Il testo della prova è risultato coerente rispetto ai programmi. L'esito negativo della prova è risultato coerente con la presentazione della classe da parte dei commissari interni e presente negli atti e nel documento del 15 maggio. La risposta all'ultima parte dei quesiti A e B è da intendersi in relazione all'effettivo grado di preparazione dei candidati.
85. In entrambi i problemi si segnala la mancanza di questioni risolvibili con metodi alternativi.
86. In linea con il programma svolto e di media difficoltà.
87. Indicare dall'inizio dell'anno i contenuti da affrontare nell'ultimo anno per evitare che la prova di matematica rimanga una "cinquina al lotto"!
88. L'ultimo quesito del primo problema coinvolgeva argomenti non trattati nella programmazione disciplinare.
89. L'ultimo quesito di entrambi i problemi è stato affrontato da un numero esiguo dei candidati. I quesiti n. 4 e 9 sono stati ignorati - forse non si studia la geometria in modo adeguato. I quesiti 1 e 5 sono stati svolti dalla quasi totalità dei candidati. Permane negli anni la

- sfasatura tra i problemi affrontati nel percorso scolastico e quelli proposti nelle tracce ministeriali.
90. La Commissione ritiene che il quinto quesito abbia indotto a qualche svista nella risposta, data una certa ambiguità nella formulazione.
  91. La difficoltà maggiore di chi corregge la prova è trovare un giusto equilibrio nell'assegnazione dei punteggi perché spesso si trovano insieme problemi e quesiti di difficoltà estremamente diverse. Non credo che tutte le commissioni usino il medesimo metro. Perché non inviare con le tracce anche una proposta di griglia di valutazione specifica? Un ragazzo lavora proficuamente per un tempo limitato certamente non per 6 ore; tanto tempo serve solo ad aumentare le possibilità di copiatura.
  92. La formulazione del quarto quesito si prestava a diverse interpretazioni. La richiesta era "Tra i poliedri regolari esiste quello le cui facce sono esagoni?"
  93. La formulazione dell'ultimo quesito del primo problema era ambigua. Alcuni quesiti apparentemente semplici richiedevano risposte non facili da motivare.
  94. La formulazione di alcuni quesiti non specificava se era richiesto un procedimento risolutivo o una giustificazione oppure se sarebbe stato sufficiente la semplice risposta.
  95. La geometria euclidea nello spazio è poco conosciuta dagli studenti in quanto è quasi sempre trascurata nel corso degli studi superiori. Il calcolo combinatorio risulta poco presente nei programmi dei licei.
  96. La griglia di correzione riferita a ciascun quesito tipizzata per un dichiarato obiettivo dell'accertamento dovrebbe essere direttamente messa a punto dall'autore della prova ministeriale e fornita alle commissioni con le necessarie istruzioni insieme al testo ministeriale.
  97. La prova non risulta efficace per misurare le conoscenze e le capacità dei candidati. In particolare i problemi misurano quasi esclusivamente le competenze del candidato mentre i quesiti proposti hanno in generale consegne poco articolate e livelli di difficoltà poco equilibrati.
  98. La preparazione della classe è risultata molto superficiale ed inadeguata sia ad affrontare i problemi che i quesiti anche nelle parti di bassa difficoltà concettuale e di calcolo. Non si evidenziano capacità argomentative nell'approccio ai temi presenti nella prova.
  99. La preparazione della classe è risultata molto superficiale ed inadeguata ad affrontare i problemi e i quesiti anche di bassa difficoltà.
  100. La presenza di argomenti che generalmente non vengono svolti nel corso di studi e la contestuale presenza di quesiti di risoluzione molto facile, quasi immediata, rischia di sminuire il valore della prova.
  101. La prova pur presentando delle evidenti difficoltà in alcuni quesiti è stata tuttavia svolta in maniera agevole.
  102. La prova pur con le evidenti difficoltà è stata svolta in maniera agevole.
  103. La prova appare coerente nella struttura con il programma ministeriale ma con una impostazione dei problemi che risulta di difficile interpretazione da parte degli alunni, non abituati a questo tipo di lavoro.
  104. La prova è da considerarsi complessivamente valida sia perché le tracce sono risultate idonee rispetto ai programmi svolti sia perché hanno consentito di effettuare una valutazione oculata del merito dei candidati.
  105. La prova assegnata non risulta essere eccessivamente complicata però sono presenti contenuti non contemplati dai programmi. Alcuni quesiti sono eccessivamente semplici mentre

- altri sono più complessi.
106. La prova coinvolge argomenti di carattere generale oggetto di studio dell'intero quinquennio.
  107. La prova dovrebbe avere argomenti più inerenti al programma e agli argomenti svolti nell'ultimo anno di corso.
  108. La prova dovrebbe essere più snella per richiedere un tempo non superiore alle tre ore. Si avrebbe una maggiore concentrazione dei candidati.
  109. La prova è generalmente adeguata al programma trattato durante i cinque anni di corso.
  110. La prova è risultata accessibile e coerente con i programmi svolti.
  111. La prova è risultata alla portata di un candidato con preparazione anche pregressa almeno sufficiente.
  112. La prova è risultata decisamente semplice. Nella compilazione del questionario risulta obbligatorio segnalare il motivo delle difficoltà incontrate. Non essendo possibile lasciare la casella in bianco, neppure nel caso in cui le difficoltà incontrate siano molto basse, ho scelto la casella "formulazione ambigua" pur ritenendo che i problemi fossero formulati in modo chiaro.
  113. La prova è risultata di media difficoltà nonostante tutto gli alunni hanno avuto problemi nell'analisi e nell'interpretazione della traccia.
  114. La prova è risultata impegnativa soprattutto nella parte geometrica.
  115. La prova è risultata molto semplice: in particolare i quesiti sono stati, a confronto con gli anni passati, banali e immediati. Una classe con una sufficiente preparazione non avrebbe avuto difficoltà a completare la prova in ogni sua parte.
  116. La prova è risultata piuttosto complessa nella parte relativa ai problemi soprattutto per il punto 4 di entrambi.
  117. La prova è stata affrontata con serietà da tutti i candidati tenendo conto degli argomenti svolti durante l'anno.
  118. La prova è stata affrontata dalle due classi con serenità.
  119. La prova è valida per valutare conoscenze e competenze in quanto spazia a sufficienza nei vari argomenti.
  120. La prova è valutata dalla Commissione più semplice rispetto agli anni passati.
  121. La prova è risultata ben strutturata e ben diversificata; permetteva ai candidati di affrontare tutte le domande in quanto erano svincolate. Meno difficile rispetto agli anni precedenti.
  122. La prova era adeguata ai programmi ministeriali.
  123. La prova era assolutamente aderente al programma svolto nei cinque anni.
  124. La prova era fattibile, ma permangono difficoltà sia nel ricordare i vari contenuti, soprattutto se ci sono riferimenti ad anni precedenti, che difficoltà di calcolo.
  125. La prova era in linea con quanto solitamente insegnato in quinta.
  126. La prova era molto equilibrata e avrebbe consentito a qualsiasi alunno dotato di una preparazione media di svolgerlo in modo almeno sufficiente. La classe però non aveva la preparazione necessaria come confermato dall'altissimo numero di insufficienze nei voti di ammissione di matematica.
  127. La prova mi è sembrata adeguata per un liceo scientifico ordinario. Ritengo opportuno che ogni quesito richieda esplicitamente allo studente di argomentare o motivare la risposta; ad esempio al quesito 10 si poteva rispondere con un valore lasciando la commissione nel dubbio su come valutare tale risposta. Le difficoltà incontrate dai candidati sono state causate da lacune nelle conoscenze di base.

128. La prova per questa classe si è rivelata molto impegnativa sia perché la formulazione è risultata ambigua sia perché alcuni argomenti sono stati svolti negli anni precedenti.
129. La prova presuppone: 1) il possesso di conoscenze e abilità approfondite su principi, teorie, concetti, regole, procedure, e tecniche di calcolo che vengono svolti nell'intero corso di studi; 2) la capacità di rielaborare le conoscenze acquisite e di tradurle in strategie risolutive utilizzando un metodo di lavoro efficace, chiarezza e rigore nella comunicazione delle soluzioni. Tali obiettivi cognitivi non vengono raggiunti dalla maggior parte degli studenti alla fine del 5° anno.
130. La prova proposta è risultata adeguata soprattutto perché ha toccato varie parti della disciplina.
131. La prova può ritenersi valida sia relativamente alla difficoltà presentata dalla traccia che è stata affrontata così come pervenuta dal ministero da 18 dei 19 candidati (uno di essi seguiva una programmazione differenziata) sia riguardo al tempo a disposizione.
132. La prova riguarda argomenti non svolti dagli studenti (nei quesiti).
133. La prova risulta consona ai programmi ministeriali, tuttavia i quesiti e le richieste inerenti la geometria solida hanno messo in difficoltà alcuni candidati laddove tale parte di programma non è stata sviluppata adeguatamente.
134. La prova scritta di matematica dell'esame di stato di liceo scientifico per l'anno scolastico 2008/2009 è risultata di livello adeguato e non in contraddizione con le indicazioni dei programmi stessi. Nel complesso sembra che la prova abbia mirato ad accertare le conoscenze specifiche, le competenze nell'applicare le procedure e i concetti acquisiti nonché le capacità logiche e argomentative.
135. La prova scritta proposta ha messo la maggior parte degli alunni in condizioni tali da poter affrontare, con una certa sicurezza in merito ai risultati, il problema e sicuramente più di cinque quesiti proposti dal questionario. La difficoltà rilevata non è stata quindi relativa alla risoluzione delle questioni proposte ma ha riguardato sostanzialmente l'utilizzo del linguaggio specifico e la comunicazione in linguaggio matematico. Per alcuni quesiti la risoluzione si è resa banale proprio perché priva di giustificazioni e argomentazioni attraverso le quali è possibile seguire un procedimento, articolare le tappe di un ragionamento per poi giungere alla validità di ciò che si propone nella soluzione. Risolvere problemi attraverso l'utilizzo di tecniche di capacità logiche ed argomentative permette di comunicare quanto i contenuti siano stati assimilati consapevolmente.
136. La prova si è rivelata nel complesso deludente. Non vi erano richieste che facessero riferimento a integrali, derivate e limiti di particolare rilievo.
137. La prova si è rivelata, in generale, adeguata alla preparazione degli studenti. Nel caso specifico di questa classe, i problemi sono dovuti all'insegnamento ricevuto durante l'anno. Tale insegnamento si è mostrato totalmente inadeguato.
138. La prova si ritiene idonea alle conoscenze e competenze degli allievi.
139. La prova spazia su un numero troppo vasto di argomenti.
140. La prova, anche se più facile rispetto agli anni precedenti, ha disorientato gli alunni. Infatti molti alunni orientati nella risoluzione del 1° problema, hanno successivamente optato per il 2° problema.
141. La prova di questo anno si è rivelata assai più fattibile rispetto ad alcune prove passate sia per la difficoltà degli esercizi sia per le conoscenze necessarie per lo svolgimento. Trovo giusta questa ricalibratura di prove eccessivamente difficili che poi alla fine perdono il loro scopo. Naturalmente la giusta difficoltà di una prova così importante va assolutamente

- mantenuta al fine di evitare banalità che non servirebbero ugualmente a nulla. Forse sarebbero necessarie delle indicazioni nazionali per quanto riguarda i programmi; per esempio degli argomenti obbligatori da svolgere troppo spesso diversissimi anche perché poi il prezzo delle lacune lo pagano i ragazzi agli esami.
142. Prova valida; è sembrata eccessiva la disparità delle richieste e delle difficoltà tra i vari quesiti. È sembrata non sempre ben definita la formulazione delle richieste in particolare nei quesiti.
  143. Le conoscenze acquisite durante l'ultimo anno di liceo sono necessarie per affrontare tre dei quattro punti richiesti.
  144. Le difficoltà riscontrate dagli studenti nell'elaborazione della prova di matematica dipendono da una visione meccanica della materia e da carenze nella preparazione di base accompagnate da scarsa consapevolezza degli strumenti matematici.
  145. La prova proposta è risultata adeguata soprattutto perché ha toccato varie parti della disciplina.
  146. Le prove non presentavano difficoltà insuperabili.
  147. Le prove proposte non presentavano particolari difficoltà ma stante la preparazione di base (molto carente) dei candidati avvalorata peraltro dal docente titolare della disciplina, si sono rivelate di difficile risoluzione.
  148. Le richieste soprattutto nei quesiti dovrebbero essere più dettagliate (ad esempio nel quesito 10 non solo si calcoli ma si giustifichi o si argomenti).
  149. Le richieste nei quesiti dovrebbero essere più dettagliate (ad esempio nel quesito 10 chiedere di argomentare e giustificare, non solo di calcolare).
  150. Le tre ore settimanali scolastiche non sono sufficienti per svolgere completamente la programmazione.
  151. Lo studio di funzione solo algebrica o solo trascendente metterebbe il candidato in difficoltà minori pur richiedendo le stesse competenze di analisi matematica. Ottimi i richiami alla storia della matematica e al calcolo combinatorio.
  152. Lo studio di funzioni miste generalmente non viene molto attenzionato, di conseguenza una parte del 1° problema non è stata svolta correttamente. Inoltre la risoluzione di equazioni per via grafica non è molto praticata.
  153. Mediamente accessibile e risolvibile.
  154. Meglio degli altri anni, ma 1) è necessario un syllabus con gli argomenti su cui verte la prova 2) che essa duri meno tempo o sia divisa in 2 parti in modo da evitare sempre più facili copie anche dall'esterno (internet e sms) 3) in almeno una parte dovrebbe essere consentito l'uso di calcolatrici grafiche (eventualmente anche simboliche).
  155. Mi è apparsa eccessiva la rilevanza data alla geometria solida sia nei quesiti che in parte del problema.
  156. Molta eterogeneità nella difficoltà dei quesiti.
  157. Molti allievi hanno avuto difficoltà nel visualizzare il solido del quarto punto del primo problema.
  158. Nei quesiti quando si chiede di dare una spiegazione sarebbe bene indicare una lunghezza (in righe o parole).
  159. Nel primo problema è presente un argomento non facente parte del programma ministeriale.
  160. Nel primo problema era richiesto lo studio di una disequazione trascendente che non sempre nel corso di studi si ha il tempo di sviluppare ed anche lo svolgimento del quarto punto è un argomento che si riesce a trattare proprio negli ultimi giorni di scuola.

161. Nel Problema n.1 relativamente al punto tre viene citato il “perimetro di  $AOB$ ”. Non essendo  $AOB$  un poligono sarebbe stato opportuno indicare “la misura del contorno della figura mistilinea  $AOB$ ”.
162. Nella prova sono state richieste alcune tematiche del Biennio, poche sono le tematiche dell’ultimo anno.
163. Nelle prove di matematica scolastiche e in quelle universitarie gli studenti sono informati preventivamente del punteggio dei singoli quesiti o problemi assegnati da chi somministra la prova: ciò garantisce maggiore trasparenza e oggettività alla valutazione. Sotto questo aspetto andrebbe finalmente superata l’anomalia della prova di matematica dell’Esame di Stato.
164. Nessuna delle motivazioni proposte come causa delle difficoltà incontrate dagli allievi è adeguata alla situazione riscontrata. Quesiti e problemi non presentano difficoltà eccessive. Studio superficiale e conseguenti conoscenze poco solide sono le vere cause.
165. Non è centrata: in particolare i quesiti sul programma di Analisi della 5.a Liceo Scientifico.
166. Nonostante il primo problema e un congruo numero di quesiti siano da considerarsi di bassa difficoltà, si osserva che la prova risulta tarata sull’effettivo livello medio di conoscenze capacità e competenze degli studenti.
167. Problemi e quesiti devono essere attinenti al programma ministeriale del triennio ed in particolare all’ultimo anno di corso. Questo è stato rispettato quest’anno più che in passato. Continuare su questa via.
168. Occorre una griglia unica e non discrezionale.
169. Occorrerebbe dare minore rilevanza ad argomenti trattati negli anni precedenti, in particolare per quanto riguarda la geometria solida.
170. Opportuna la presenza di quesiti che riprendano argomenti svolti negli anni precedenti.
171. Orario curricolare insufficiente per una preparazione completa.
172. Per quanto riguarda i problemi, mediamente gli studenti hanno trovato notevoli difficoltà nel calcolo dei volumi richiesti.
173. Per uniformare le valutazioni sarebbe meglio fornire la correzione e il punteggio da attribuire per ogni punto svolto, lasciando alla commissione il giudizio sull’eleganza della prova. Piuttosto che la suddivisione odierna in problemi e quesiti sarebbe meglio formulare due o più tracce ognuna con problema e quesiti prestabiliti da svolgere completamente e che possano veramente testare le competenze e le conoscenze dei candidati.
174. Positiva l’indipendenza dei punti dei problemi. Negativa la disparità di complessità dei quesiti.
175. Positiva la gradualità delle difficoltà nei problemi con domande indipendenti tra loro. Quesiti troppo semplici rispetto ai problemi. Non sempre chiaro il livello di approfondimento richiesto nelle risposte ai quesiti.
176. Positiva la traccia eccezion fatta per la quarta domanda del problema n. 1.
177. Presenza di troppi quesiti di difficoltà elementare e relativi a conoscenze di base. Mancanza di quesiti di difficoltà media. Mancanza di quesiti di geometria euclidea di carattere teorico o storico.
178. Problema sbilanciato.
179. Problemi e quesiti equilibrati alla preparazione degli studenti.
180. Problemi interessanti e adeguati; i quesiti, eccetto il 9, a breve risoluzione e di bassa difficoltà.
181. Problemi molto più semplici rispetto agli anni precedenti. Quesiti non tutti risolvibili per

- argomenti non svolti o svolti negli anni precedenti.
182. Prova adeguata al corso di studi.
  183. Prova affrontabile dai candidati.
  184. Prova attinente al programma di Analisi relativo al 5° anno.
  185. Prova ben strutturata con difficoltà graduate ed accessibili anche ai candidati meno preparati con possibilità per gli alunni migliori di ottenere risultati anche ottimi ed eccellenti.
  186. Prova coerente con i programmi normalmente svolti.
  187. Prova congrua alla preparazione degli alunni.
  188. Prova del corrente anno maggiormente rispondente al programma ministeriale rispetto agli anni precedenti.
  189. Prova di media difficoltà, ma nonostante tutto gli alunni hanno avuto problemi nell'analisi e nell'interpretazione della traccia.
  190. Prova di media difficoltà per lo standard delle prove di Matematica. Gli studenti non padroneggiano tutte le conoscenze necessarie a risolvere correttamente il compito.
  191. Prova globalmente ben articolata.
  192. Prova nel complesso adeguata alla preparazione degli allievi.
  193. Prova ottima in quanto selettiva con alcuni quesiti molto semplici e l'ultimo punto di entrambi i problemi di livello cognitivo alto. Quesito 5 di formulazione ambigua.
  194. Prova ritenuta accessibile, congrua rispetto ai programmi ministeriali. Ottimo il richiamo agli argomenti relativi agli anni precedenti.
  195. Prova sostanzialmente equilibrata che permetteva di mettere in luce sia abilità di base che conoscenze e capacità più elevate. Criticabile il quesito n° 5 in cui non è chiaro se ci si riferisce a numeri o alla teoria dei limiti. Il quesito n° 9 tratta di argomenti non sempre svolti e così pure il n° 2.
  196. Prove molto facili hanno evidenziato comunque una scarsa attenzione da parte dei docenti allo studio della geometria solida e soprattutto che gli allievi hanno poca dimestichezza col disegno tridimensionale.
  197. Quesiti facili rispetto ai problemi: in alcuni casi non si comprende con quale livello di approfondimento si vuole la risposta. Nei problemi buona la graduazione delle difficoltà nei vari punti e l'indipendenza dei vari punti.
  198. Quesiti troppo facili rispetto ai problemi; a volte nei quesiti non si comprende il livello di approfondimento con il quale si vuole la risposta. Si apprezza la difficoltà crescente con la quale sono stati strutturati i vari punti dei problemi e la loro indipendenza.
  199. Quest'anno la prova era assolutamente aderente ai programmi svolti e di livello medio. Le insufficienze sono legate all'impreparazione degli alunni arrivati in quinta con valutazione insufficiente dopo 4 anni di debiti non risolti.
  200. Sarebbe opportuno richiedere sempre nei quesiti una risposta commentata e procedimenti risolutivi motivati.
  201. Ritengo che il compito non fosse difficile, soprattutto i quesiti, anche se il quarto punto del primo problema non era formulato chiaramente. Gli scarsi risultati sono imputabili ad un livello di preparazione della classe molto basso, come confermato anche dalle prove orali. I problemi sono stati svolti al 50% e con errori; chi ha affrontato il primo problema non è nemmeno riuscito a svolgere il semplice studio di funzione proposto. Anche i quesiti non sono stati svolti in modo preciso e puntuale, ma spesso in modo approssimativo e superficiale. Nei quesiti proposti permangono argomenti che spesso non vengono proposti agli studenti.

202. Sarebbe corretto che il Ministero allegasse in tempo utile una griglia di valutazione in modo da eliminare oggettive disparità nella valutazione di una stessa prova.
203. Sarebbe il caso che anche i problemi si rifacciano al programma effettivamente svolto nell'ultimo anno di liceo che riguarda principalmente l'analisi matematica e le sue applicazioni.
204. Sarebbe molto importante avere a disposizione un "programma" nazionale dettagliato e definito su cui vertano le prove d'esame e al quale dovrà attenersi chi prepara le prove stesse (e anche chi prepara per le prove!).
205. Sarebbe opportuno che venisse meglio definito dettagliatamente il programma dell'ultimo anno di corso, in modo dettagliato, al fine di migliorare il lavoro dei professori.
206. Sarebbe opportuno evitare nel problema argomenti che spesso vengono svolti a maggio o oltre.
207. Sarebbe per noi più auspicabile una prova di durata inferiore (3 ore - vietando l'uscita degli alunni dalla classe) con un numero di richieste minori e di un minore grado di difficoltà.
208. Si rileva una differente impostazione fra i problemi e il questionario.
209. Si riscontra la mancanza di questioni risolubili con metodi alternativi in entrambi i problemi.
210. Si vuole evidenziare la difficoltà riscontrata dai candidati nell'interpretazione del testo dei problemi; il linguaggio utilizzato è risultato a tratti troppo sintetico.
211. Sia nel primo che nel secondo problema le maggiori difficoltà sono state riscontrate nel calcolo del volume finale (nessuno studente è riuscito a risolvere l'ultima parte del primo problema).
212. Sono risultati difficili i quesiti n° 4 - 9.
213. Sui problemi: il quarto punto di ciascun problema (calcolo del volume) presenta una difficoltà elevata (il corrispondente punto del problema 2 della prova PNI è ridicolo al confronto). Sui quesiti: sarebbe meglio presentassero lo stesso grado di difficoltà (confrontare quesito 9 con quesito 10) e soprattutto siano tali da verificare la preparazione di analisi del quinto anno.
214. Troppa differenza di difficoltà tra problemi e quesiti.
215. Troppo poca analisi. Quesiti di difficoltà troppo diverse. Espliciterei sempre di motivare passaggi e risposte.
216. Troppi argomenti necessitano di conoscenze relative ad argomenti studiati negli anni precedenti.
217. Troppi quesiti richiedevano conoscenze relative ad argomenti studiati negli anni precedenti.
218. Troppo facile rispetto a quelle dei 5 anni precedenti. Questo ha compresso la fascia dei voti senza distinguere i bravi dai mediocri. Gli alunni esaminati sono in numero di 40 e tutti hanno affrontato il primo quesito.
219. Un numero eccessivo di quesiti è risultato troppo elementare per questo indirizzo di studi. Una scelta di tale tipo non consente infatti una valutazione ben calibrata e non permette di differenziare in modo chiaro i diversi livelli di conoscenza e le diverse competenze possedute dagli allievi.
220. Un quesito del problema 2 richiede conoscenze che non sono oggetto dei programmi ministeriali per un liceo scientifico ordinario. Geometria solida, storia della matematica e calcolo combinatorio non si riescono sempre a trattare.
221. Il quesito 10 del questionario era troppo semplice.
222. Un questionario eccessivamente facile e poco orientato su problematiche di tipo teorico.
223. Un'unica prova a carattere nazionale non può tenere conto della preparazione raggiunta

- dagli studenti in quanto la programmazione del corso di studi varia da scuola a scuola, sia per quanto riguarda gli argomenti trattati che il livello di approfondimento eseguiti.
224. Utile il fatto che i punti del problema non siano strettamente concatenati. Ciò permette ai candidati di affrontarne almeno alcune parti.

### 3.2 P.N.I. e Brocca

1. Il numero di ore a disposizione per svolgere i programmi è insufficiente.
2. Prova complessivamente equilibrata nella distribuzione dei temi da affrontare. Qualche riserva viene espressa sul Quesito n.10: l'argomento è piuttosto specialistico.
3. Quest'anno la prova è stata aderente al programma svolto nell'ultimo anno di liceo e in generale nell'ultimo triennio.
4. Le difficoltà della prova di matematica sono dovute alla mancanza da parte degli studenti di una visione unitaria della matematica. Di conseguenza è opportuno durante ogni anno scolastico svolgere prove scritte strutturate in problemi e quesiti (simili alla prova di maturità) per concatenare i vari argomenti trattati durante ciascun anno scolastico.
5. I problemi si ritengono ben strutturati.
6. Nel complesso la prova sembra essere completa ed organica.
7. Prova ben strutturata e in linea con i programmi svolti.
8. Il problema svolto è coerente con i programmi svolti nelle due classi.
9. Sarebbe opportuno proporre prevalentemente quesiti relativi al programma dell'ultimo anno.
10. Il monte ore lezione e il programma da sviluppare sono tali da non consentire al docente di trattare argomenti riguardanti la storia della matematica come nel caso richiesto.
11. Questionario lontano dalla tipologia di esercizi su cui gli alunni si allenano nell'ultimo anno di corso.
12. I quesiti proposti consentono di valutare in modo valido la preparazione. Il ministero deve indicare in modo più dettagliato i programmi da svolgere.
13. Prove molto facili.
14. Le richieste dei problemi non sono né ambigue né particolarmente impegnative. Le difficoltà incontrate dai candidati sono da imputarsi ad altre motivazioni
15. Il 10° quesito è un poco ambiguo.
16. La prova non presentava difficoltà insuperabili.
17. Il quesito n° 5 ha diverse possibili risposte da giustificare.
18. Il principio di Cavalieri esula dai programmi svolti dalla maggior parte dei docenti.
19. Non adeguata la divisione in problemi e quesiti.
20. La prova è sembrata facile alla commissione.
21. La prova permetteva un'ampia scelta tra gli argomenti proposti.
22. Il compito era conforme al programma svolto dalle classi. Le domande erano indipendenti per cui ogni alunno poteva svolgerlo senza inficiare tutto il compito. I calcoli (salvo la domanda 4 del problema 2) non erano particolarmente complessi.
23. Il testo della prova è risultato coerente rispetto ai programmi di matematica nei licei scientifici P.N.I.
24. I candidati hanno incontrato difficoltà nelle impostazioni.

25. I problemi richiedono una capacità di astrazione e di autonomia decisionale presente solo negli studenti migliori di una classe.
26. I quesiti contengono una gamma di contenuti troppo ampia rispetto al tempo di cui si dispone durante l'anno scolastico per poterli trattare o ripassare.
27. La prova comprende spesso argomenti non trattati dagli studenti.
28. Problemi adeguati; troppo elevato il numero di quesiti relativi ad argomenti specifici del P.N.I.
29. Si ritiene il problema n. 1 di difficoltà alta.
30. Diverso livello di difficoltà non confrontabile tra il primo e il secondo problema.
31. L'uso dei simboli  $n$  e  $k$  nei problemi ha creato difficoltà agli studenti.
32. Non erano presenti nei quesiti elementi caratteristici del corso sperimentale.
33. Alcuni quesiti sono stati estremamente semplici.
34. La prova assegnata non risulta essere eccessivamente complicata.
35. L'insegnamento-apprendimento è stato semplicemente disastroso.
36. La prova dovrebbe essere strutturata in modo da proporre in maniera graduale la necessità di ricorrere a competenze acquisite con approfondimenti o a nozioni particolari.
37. Nessuno studente ha svolto il problema n.1.
38. I quesiti sulla probabilità sono stati svolti in modo errato. I ragazzi hanno incontrato difficoltà nei quesiti riguardanti la geometria solida. Il primo punto del secondo problema è stato svolto in modo superficiale ed approssimativo forse anche per come è stato formulato.
39. È opportuno che sia indicato il punteggio massimo da assegnare ad ogni problema e/o quesito.
40. Sarebbe necessario finanziare almeno 20 ore di sostegno e potenziamento della materia.
41. È auspicabile una formulazione molto accurata del testo per non disorientare i candidati nella scelta del problema e dei quesiti da risolvere.
42. Alcuni argomenti sono marginali rispetto alla didattica vera svolta allo scientifico P.N.I.: storia della matematica e geometria solida sintetica.
43. I problemi e i quesiti pongono spesso situazioni geometriche piuttosto complesse rispetto ai programmi di geometria affrontati nel liceo. Al contrario.
44. Prova più semplice rispetto a quelle degli ultimi anni ed in definitiva adeguata al livello dello studente medio. Eccessivo il tempo.
45. Prova proporzionata alla effettiva preparazione dello studente medio.
46. Ben articolata ed accessibile a tutti.
47. La prova mi è parsa adeguata.
48. I due problemi presentano caratteristiche simili con studio di funzione e integrale definito.
49. Sui problemi: la commissaria di matematica ritiene che il problema 2 sia molto più semplice dei problemi assegnati al corso di ordinamento che ha corretto per l'altra classe. Sui quesiti: dovrebbero presentare lo stesso grado di difficoltà e dovrebbero vertere maggiormente sul programma di analisi del quinto anno.
50. La Commissaria di matematica ritiene che i quesiti dovrebbero vertere più specificamente sul programma di analisi di quinta ed essere impostati in modo da essere più equi come difficoltà. Altra considerazione: il problema P.N.I. numero 2 è decisamente più facile di entrambi i problemi presentati al corso di ordinamento.
51. Tendenzialmente tradizionale con diverse proposte sulla geometria solida e assenza completa di esercizi sulle trasformazioni.
52. Eccessivamente complessa rispetto ai normali programmi svolti nel curriculum.

53. I problemi hanno inizialmente generato difficoltà in quanto atipici rispetto a prove proposte negli anni precedenti.
54. Troppo poca analisi. Quesiti di difficoltà troppo diverse. Espliciterei sempre di motivare passaggi e risposte.
55. Adeguata rispetto al corso di studi.
56. È stata penalizzante la scelta del primo problema.
57. L'ultimo punto del primo problema non è stato compreso dai candidati che hanno scelto la seconda traccia anche per l'assenza di nozioni di trigonometria.
58. Equilibrata nella verifica degli argomenti del percorso scolastico.
59. Di fattura semplice per un P.N.I. dove dalla prima alla quinta si effettuano 5 ore settimanali. Considerando le tre ore settimanali. . .
60. Nella richiesta di particolari procedimenti sarebbe opportuno specificare tutti i modi in cui tale procedimento è denominato.
61. Si rileva nel Q.2 la mancanza di richiesta di motivazioni alla risposta e nei Q.9 e Q.10 la marginalità rispetto al programma.
62. Presenza di elementi di difficoltà forse troppo alta in alcuni esercizi.
63. Gli argomenti dei quesiti non rispondono agli argomenti inseriti nella programmazione annuale.
64. Gli argomenti di alcuni quesiti non sono svolti durante l'ultimo anno di corso; altri riguardano concetti della matematica classica mai svolti.
65. Dall'analisi della prova è emerso che essa non risulta eccessivamente complessa.
66. La prova si è rivelata fattibile dalla maggioranza dei candidati.
67. La prova va bene.
68. Va bene così.
69. La prova ha insistito troppo su argomenti svolti negli anni scolastici precedenti.
70. La prova non comporta la valutazione su argomenti fondamentali del V anno.
71. Ho osservato uno scostamento marcato rispetto alle indicazioni nazionali sui programmi per il P.N.I. I problemi erano più facili di quelli somministrati nel corso tradizionale.
72. Si propone un maggior numero di quesiti inerenti il programma di quinta (analisi infinitesimale).
73. Inserire un numero maggiore di quesiti riguardanti argomenti di analisi infinitesimale.
74. Molti quesiti sono incentrati sul programma svolto negli anni precedenti; gli studenti che hanno affrontato il secondo problema hanno sottovalutato la prima richiesta; la scelta dei quesiti è determinata dai diversi percorsi seguiti dalle due classi.
75. Nonostante i risultati deludenti ottenuti dagli allievi esaminati il compito è sembrato più semplice nel panorama degli ultimi anni. I quesiti erano sicuramente facili.
76. La prova presentava una gradualità tale da consentire di evidenziare bene il grado di preparazione degli studenti.
77. La prova era equilibrata.
78. La gestione del parametro  $k$  ( $<>0$ ) ha creato problemi (tema 2); la somma di  $n$  termini ha creato problemi (tema 1); troppi quesiti per risolvere i quali occorreva saper ragionare.
79. Il programma P.N.I. del quinto anno è stato toccato solo in minima parte, soprattutto nei quesiti: solo 1.
80. Accessibile e maggiormente aderente ai contenuti effettivamente trattati durante l'ultimo anno
81. La maggior parte dei questionari verteva su argomenti non molto inerenti al programma.

82. La prova è risultata difficoltosa nel primo quesito per la scelta di inserire il fattoriale nell'espressione della funzione.
83. Sostanzialmente equilibrata.
84. La prova è coerente con la programmazione di un Liceo Scientifico.
85. I temi ed i quesiti proposti risultano coerenti con le tematiche oggetto di studio.
86. I temi ed i quesiti proposti si ritengono abbastanza coerenti con gli argomenti oggetto di studio.
87. Va valutata l'opportunità di suddividere la prova in due sessioni consecutive di 2-3 ore ciascuna.
88. La prova risultava fattibile, ma la preparazione degli alunni è risultata non adeguata. Il quesito 10 e il quesito 9 (risolto mediante le formule) non sono consoni al programma che si riesce a svolgere.
89. Non conoscenza di alcuni argomenti.
90. Alcune difficoltà nel calcolo.
91. Abbastanza complessa in almeno due quesiti.
92. La prova di matematica risulta difficoltosa poiché non sempre i programmi ministeriali vengono espletati durante il curriculum di studi.
93. I problemi sono corrispondenti alle tematiche che si trattano in media nell'ultimo anno di corso di uno scientifico P.N.I. Un elemento fortemente pregiudicante è risultato l'uso del fattoriale nel primo problema.
94. Il secondo problema risultava molto più laborioso del primo.
95. Il secondo problema presentava maggiori difficoltà rispetto al primo.
96. La prova è stata adeguata al programma svolto dagli allievi.
97. Sia i quesiti che i problemi sono in linea con i programmi.
98. Ridurre il numero dei quesiti e ridurre il tempo di svolgimento della prova.
99. Idonea alle conoscenze.
100. La prova è risultata di difficoltà adeguata al "curriculum studi" dei candidati.
101. Alcuni quesiti sono formulati su argomenti che molto spesso durante l'anno scolastico non si arriva a trattare.
102. Si ritiene più adeguata una prova strutturata su venti quesiti indipendenti riguardanti gli argomenti trattati nei cinque anni del corso ed in particolare quelli del triennio.
103. Il sesto quesito è espresso in modo ambiguo: il valore di  $x_0 = 3$  non è chiaro se è in gradi radianti.
104. La prova è quasi coerente con il programma svolto nei 5 anni e la difficoltà dei problemi e dei quesiti sembra adeguata.
105. La prova è coerente con il programma svolto nei cinque anni e adeguato appare il livello di difficoltà delle questioni proposte.
106. Ben articolata.
107. Nella prova dovrebbe essere tenuto in debito conto il contenuto del programma realmente svolto durante l'anno scolastico.
108. Si dovrebbe tenere conto del programma che si è potuto sviluppare durante l'anno.
109. Quest'anno la prova è nell'insieme da ritenersi adeguata alla preparazione degli alunni.
110. La prova nella sua struttura è risultata variegata nella tipologia degli argomenti ed accessibile alla gran parte dei candidati.
111. La richiesta di dimostrazioni dovrebbe riguardare solo teoremi svolti nell'ultimo anno del corso di studi.

112. Sarebbe auspicabile limitare il numero degli argomenti proposti perché il programma di matematica non è mai svolto completamente per mancanza di tempo. È necessaria inoltre una griglia dettagliata (allegata alla prova) per la valutazione degli argomenti proposti.
113. I problemi sono sembrati idonei alla preparazione della classe mentre alcuni quesiti (geometria solida e geometrie non euclidee) non sono stati svolti in quanto vertevano su argomenti non presenti nel programma.
114. Positiva.
115. Perché non inviare insieme alle tracce anche una griglia di correzione che indichi esattamente una proposta di punteggi da associare ai vari esercizi? Credo che diverse commissioni valutino in diversa maniera prove simili. Uno studente lavora in maniera proficua per un tempo nettamente inferiore alle 6 ore concesse. Il tempo in più serve solo ad aumentare le probabilità di copiatura.
116. I quesiti 2 e 5 sono stati giudicati più semplici ma sono stati sviluppati in modo superficiale. Nel quesito 9 la segnalazione del metodo risolutivo ha creato problemi.
117. Alcuni argomenti dei quesiti non vengono svolti nel triennio e i ragazzi hanno una scelta limitata.
118. Alcuni quesiti sono risultati quasi impossibili da svolgere.
119. La prova è risultata equilibrata.
120. La prova presuppone il possesso di conoscenze e abilità approfondite su principi.
121. Difficoltà nel primo problema: il fattoriale ed il parametro  $n$  hanno scoraggiato i candidati che hanno preferito non affrontare un problema tutto sommato semplice.
122. A mio giudizio la prova offriva ai ragazzi la possibilità di mostrare la propria preparazione.
123. Problemi con richieste di risposta di difficoltà troppo disomogenea.
124. La prova è adeguata all'indirizzo di studi.
125. Prova priva di difficoltà tecniche reali.
126. Si è rilevata una certa difficoltà da parte degli alunni nell'affrontare alcuni degli argomenti richiesti.
127. La prova è valida perché riguarda diversi argomenti del programma di matematica del piano nazionale per l'informatica.
128. È valida perché comprende parecchi degli argomenti del programma di matematica del piano nazionale per l'informatica.
129. I candidati hanno individuato 3 tipi di quesiti: a) aventi contenuti affrontati durante l'anno; b) aventi contenuti mai visti; c) risolubili tramite deduzioni.
130. Il testo del primo problema presentava un'ambiguità nel calcolo del perimetro, che non specificava se riferito al settore o al triangolo, cosa che ha portato, alcuni candidati a chiedere spiegazioni in merito.
131. La prova è adeguata ai programmi svolti.
132. L'ultimo punto del secondo problema è stato affrontato e risolto da pochi studenti e da nessuno in modo completamente corretto.
133. Ottima la scomposizione dei problemi in quesiti indipendenti, ottimo il livello non alto di difficoltà di calcolo. I programmi sono troppo vasti perché si portino classi numerose ad una padronanza completa.
134. La prova di matematica di un liceo scientifico non deve consistere nella risoluzione di astrusi rompicapi interni all'analisi e alla geometria, ma deve mirare alla risoluzione di reali problemi afferenti all'indirizzo degli studi: statica, dinamica, cinematica, idrostatica, idrodinamica, elettromagnetismo, ottica, . . . per motivare l'utilità dello studio della matema-

- tica e farne apprezzare la bellezza dagli studenti sempre più disaffezionati ai bizantinismi attualmente in voga.
135. Alla portata dei candidati sulla base dei programmi svolti
  136. La commissione ritiene che la traccia richieda la conoscenza di argomenti che solitamente non si riescono ad affrontare adeguatamente durante l'anno scolastico.
  137. Vi sono poche richieste per una preparazione media e le richieste troppo semplici non si sa come valutarle.
  138. Adeguati i problemi; per i quesiti si dovrebbe chiedere di motivare la risposta, facendo vedere eventuali calcoli e passaggi.
  139. La Commissione ha rilevato che molto probabilmente i candidati avevano già trovato il giorno precedente in rete le risposte ad alcuni quesiti.
  140. Problemi troppo autoreferenziali con pochi o nessun aggancio alla realtà quotidiana. Fanno perdere allo studente la visione, la necessità e l'utilità della matematica. Alcuni quesiti (come il numero 10) non sono stati affrontati da nessun alunno.
  141. La prova è risultata adeguata. Ritengo però che il programma sia troppo ampio, in quanto abbraccia 5 anni di scuola. Questo crea disparità con le altre materie i cui scritti vertono solo sul programma dell'ultimo anno.
  142. I quesiti dovrebbero riguardare parti più importanti e più trattate del programma.
  143. Nulla da rilevare.
  144. Fornite ufficialmente la griglia correttiva con descrittori chiari in modo tale che la correzione sia facilmente riproducibile.
  145. Il quesito 5 è stato affrontato da tutti i candidati. La prova di Matematica dell'Esame di Stato 2008 - 09 è stata di livello adeguato e coerente con i programmi abitualmente svolti nel Liceo. I problemi non hanno richiesto calcoli di difficoltà eccessiva, ma piuttosto una solida comprensione dei concetti coinvolti. Il calcolo integrale è stato apprezzabilmente richiesto in connessione al suo significato geometrico, di determinazione di un'area o di un volume, in situazioni semplici ma non standard. I quesiti poi hanno sondato conoscenze di base, fondamentali ma non banali. Evitando difficoltà di calcolo fini a se stesse, essi hanno permesso di evidenziare se concetti importanti della geometria dello spazio, del calcolo combinatorio, dell'analisi sono posseduti in modo significativo dagli studenti in uscita dal Liceo Scientifico. Apprezzabile anche la scelta di un quesito (ma solo uno mi raccomando!) su un livello della matematica non convenzionale, come era il quesito 10. Nessuno dei candidati ha risposto in modo esauriente (alcuni hanno cercato di provare il 5° postulato!!) ma può servire a tutti per capire che è bene alzare il livello, dove possibile. Nel suo complesso, mi pare che la prova rappresenti una implicita indicazione a favorire una didattica della matematica che stimoli alla ricerca dei significati e all'uso consapevole dei concetti nei contesti problematici, piuttosto che ad insistere su tecniche e calcoli complessi.
  146. L'alta percentuale di insufficienze è dovuta a mancanza di studio da parte degli studenti. All'atto dell'ammissione agli esami, circa il 50% era insufficiente in matematica.
  147. Tre quesiti riguardavano la geometria solida e le geometrie non euclidee, argomenti che non sono stati affrontati dalla classe 5A.
  148. Prova sostanzialmente adeguata ai programmi svolti.
  149. Tendenzialmente tradizionale con diverse proposte sulla geometria solida e assenza completa di esercizi sulle trasformazioni.
  150. Eccessiva disparità tra i problemi e i quesiti. Problemi non troppo difficili, anche se il primo risultava scoraggiante per come era posto, si poteva partire dalla funzione particolare

- (punti 3-4) e poi generalizzarla. Quesiti troppo complicati e vari. Manca sia nei problemi che nei quesiti una parte più standard (tipo studio di funzione, applicazione di teoremi di analisi ...) caratteristica del programma di 5°, che possa essere svolta anche dagli studenti deboli.
151. Prova adeguata ai programmi svolti in tutto il quinquennio.
  152. Scarsa la parte relativa agli argomenti specifici del quinto anno, specie nei quesiti.
  153. I candidati esaminati sono 38 - sono stati computati anche i quesiti svolti in eccedenza rispetto alla richiesta ma soltanto se svolti in misura valutabile; positiva l'ampiezza degli ambiti dei quesiti che valorizza il lavoro svolto sia dagli studenti sia dai docenti; soddisfazione per la forma lineare e chiara del testo dei problemi.
  154. La consegna dei quesiti n.6 e n.9 è vincolante per i candidati che avrebbero potuto risolvere lo stesso problema utilizzando metodi alternativi. Il tema ha utilizzato in modo ridondante la definizione di fattoriale (problema n.1 e quesito n.7).
  155. La prova era adeguata alla preparazione degli allievi. Il quesito 10 prevedeva la conoscenza delle geometrie, parte di programma che non sempre viene svolto.
  156. I problemi proposti presentano richieste adeguate al programma. La scelta dei quesiti permette di evidenziare meglio le capacità logiche nella risoluzione di un problema.
  157. I quesiti di geometria sono in numero eccessivo.
  158. Nessun commento.
  159. Finalmente la prova non è ripetitiva negli argomenti trattati, non laboriosa nei calcoli e relativa ad argomenti dell'intero triennio.
  160. Finalmente un compito vario negli argomenti, non laborioso e ripetitivo nei calcoli, relativo ad argomenti dell'intero Triennio, forse un po' troppo semplice il secondo problema.
  161. Si consiglia di inserire nella prova solo gli argomenti previsti nei programmi ministeriali dell'ultimo anno.
  162. Prova abbastanza accessibile.
  163. Problemi di media difficoltà, ben strutturata. Quesiti di difficoltà molto differente. Sarebbero da eliminare quelli di carattere storico.
  164. Più chiara e fattibile rispetto agli anni precedenti.
  165. La prova, dal punto di vista formale, è stata correttamente articolata tale da giustificare uno svolgimento che avrebbe permesso ai vari candidati di ottenere un risultato lusinghiero. Tuttavia i candidati a motivo di una preparazione non del tutto soddisfacente hanno mostrato delle difficoltà nel percorso elaborativo.
  166. La prova assegnata ha dato la possibilità di esprimere la propria preparazione a tutti i candidati.
  167. Prova adeguata all'indirizzo di studi. Ben equilibrata.
  168. Le prove inviate dal ministero sono risultate essere più complesse rispetto a quelle affrontate durante il corso dell'anno.
  169. Completa, articolata e chiara.
  170. Il questionario è apparso piuttosto sbilanciato in relazione alle competenze richieste ai candidati. Nel 2° problema erano richiesti competenze possedute da quasi tutti i candidati, mentre il primo necessitava di alcune conoscenze e diverse competenze possedute solo da pochi candidati.
  171. La prova non presentava eccessive difficoltà, i calcoli erano semplici.
  172. Le maggiori difficoltà incontrate riguardano la presenza di argomenti trattati negli anni precedenti all'ultimo. Forse sarebbe opportuno restringere la scelta degli argomenti per

- i problemi ed i quesiti all'ultimo anno di corso o, in alternativa, fornire un sillabo dei possibili argomenti.
173. Scomparse le affinità. Scomparsi i radicali, valori assoluti e integrali razionali.
  174. I quesiti proponevano strategie risolutive prefissate. Forse sarebbe stato opportuno lasciare al candidato la scelta della procedura da utilizzare per la risoluzione.
  175. Lo svolgimento di alcuni quesiti prevedeva una procedura già stabilita. Forse sarebbe stato opportuno lasciare al candidato la scelta del procedimento da seguire.
  176. Il programma che si svolge nel PNI è molto vasto, quindi si possono incontrare alcuni argomenti affrontati senza averli approfonditi molto.
  177. Nei quesiti del liceo tradizionale gli studenti avrebbero avuto maggiori possibilità. I pochi quesiti che riguardavano argomenti dell'ultimo anno di corso annullavano la scelta.
  178. Tema scarsamente specifico in rapporto all'indirizzo.
  179. Adeguata.
  180. Molti alunni hanno scartato il primo problema perché ritenevano che si dovessero riconoscere le serie; in realtà ciò non era necessario.
  181. Manca un problema basato unicamente sullo studio di funzione.

## 4 Risultati analitici dell'indagine

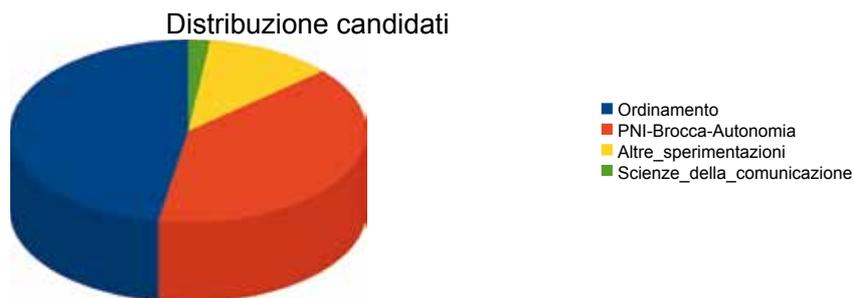
La prova di esame per l'anno 2009 è stata affrontata in Italia da 116.089 studenti interni e 2.202 esterni, distribuiti in 6896 classi. I dati riguardano un campione di 47000 studenti, pari a circa il 40% dei candidati e delle classi.

### 4.1 Analisi quantitative sul numero e la distribuzione dei candidati e delle risposte

Per dare un'idea delle dimensioni dell'indagine viene di seguito fornito il numero totale di candidati che hanno affrontato la prova e di commissioni che hanno partecipato all'indagine. In totale e per i diversi Indirizzi di Studi.

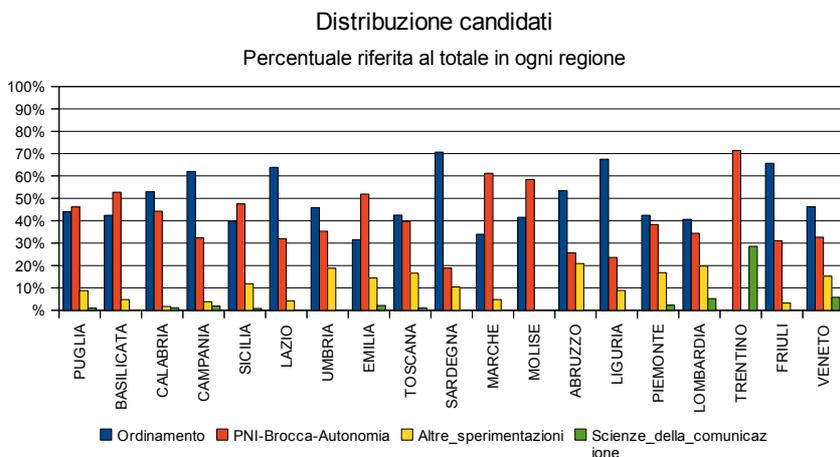
	Tutti	Ordin.	PNI-Brocca-Aut.	Altre sper.	Scienze comun.
Candidati	46999	22243	18377	5453	926
Commissioni	2057	959	830	255	43

*Illustrazione 1: Numero di candidati e commissioni per Indirizzo di Studi.*



*Illustrazione 2: Distribuzione dei candidati per indirizzo di studio.*

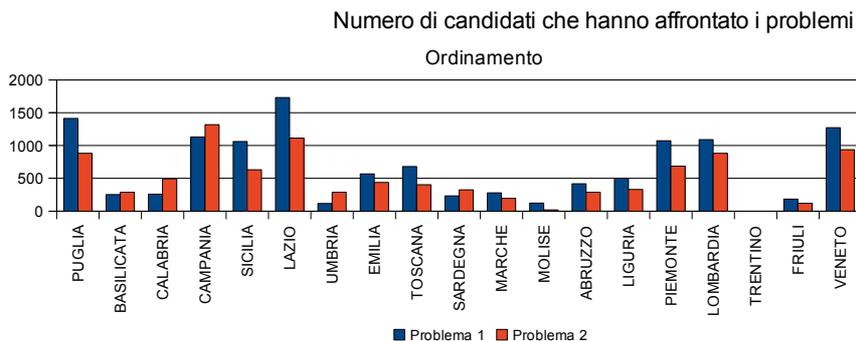
La stessa distribuzione è stata calcolata in forma percentuale nelle diverse regioni.



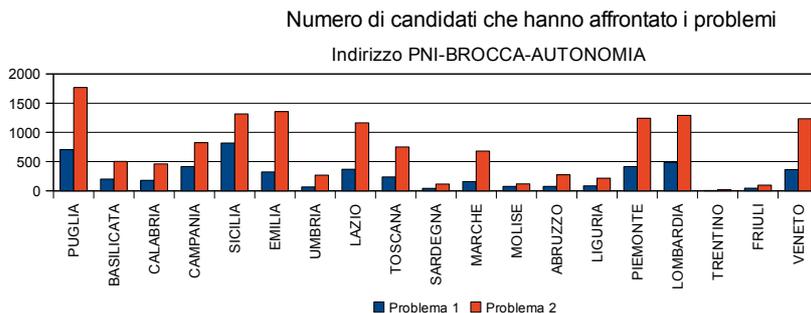
*Illustrazione 3: Percentuale dei candidati che hanno sostenuto la prova per regione e per indirizzo di studi. La percentuale è calcolata rispetto al numero totale dei candidati in ogni regione.*

Quindi si è passato a esaminare come i candidati hanno affrontato la prova nelle diverse regioni, focalizzando l'attenzione sui principali indirizzi, di Ordinamento e PNI-Brocca-Autonomia, che raccolgono la maggior parte degli studenti e si distinguono per il numero di ore dedicate alla matematica.

Nei grafici che seguono si può osservare quanti candidati hanno risposto ad uno dei due problemi, piuttosto che all'altro. Nei grafici 4 e 5 sono stati contati separatamente il numero di candidati che hanno affrontato il primo problema e quelli che hanno affrontato il secondo problema per ogni regione.

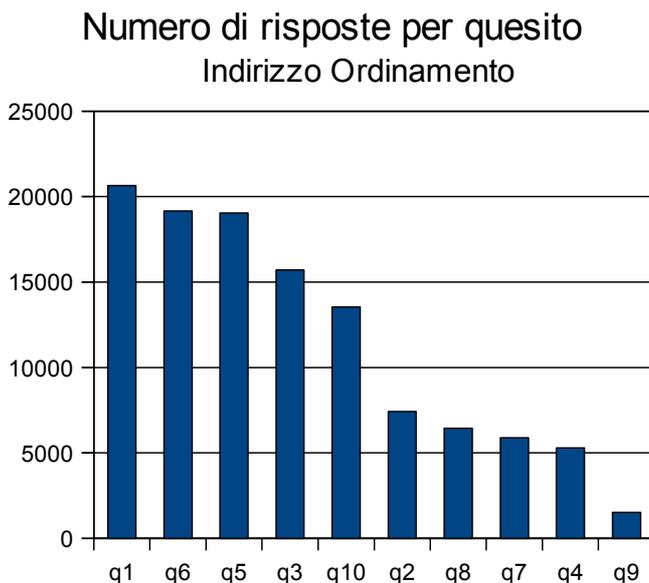


*Illustrazione 4: Numero di candidati che hanno affrontato il Problema 1 e il Problema 2 nelle diverse regioni per l'Indirizzo di Ordinamento.*



*Illustrazione 5: Numero di candidati che hanno affrontato il Problema 1 e il Problema 2 nelle diverse regioni per PNI-BROCCA-AUTONOMIA.*

Per quanto riguarda i quesiti vengono presentate, separatamente per i due indirizzi di studi di Ordinamento e PNI-Brocca-Autonomia, le statistiche relative al numero di risposte per quesito su scala Nazionale. Anche in questo caso sono state contate le risposte per ogni quesito riportate da ogni commissione, separate per i due indirizzi principali.

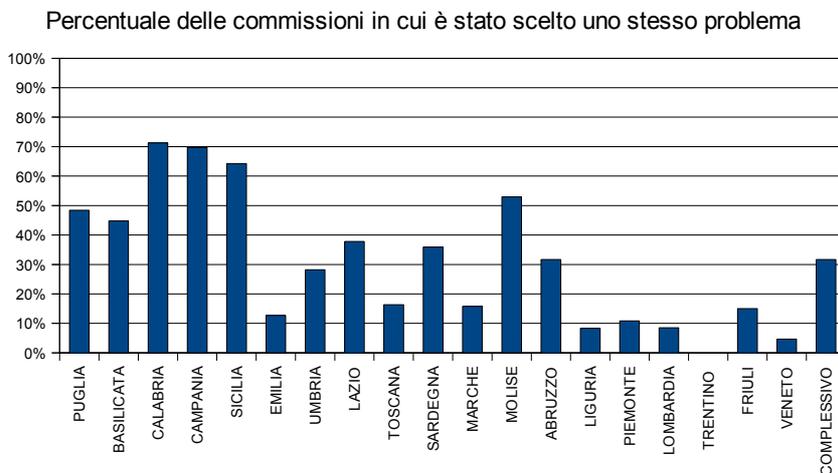


*Illustrazione 6: Numero di candidati che hanno risposto ai diversi quesiti per l'Indirizzo di Ordinamento.*



*Illustrazione 7: Numero di candidati che hanno risposto ai diversi quesiti per l'Indirizzo PNI-Brocca-Autonomia.*

In un numero rilevante di commissioni, il totale dei candidati hanno scelto di risolvere tutti lo stesso problema. Indipendentemente dalla traccia viene di seguito riportato il numero percentuale di commissioni in cui è stata scelta la stessa traccia, relativamente al totale delle commissioni di ogni regione. L'ultima colonna da un'idea della diffusione del fenomeno sul territorio nazionale.



*Illustrazione 8: Percentuale di commissioni in cui tutti i candidati hanno scelto di affrontare tutti la stessa traccia. L'ultima colonna rappresenta la percentuale totale sul numero di commissioni che hanno partecipato all'indagine.*

La polarizzazione della scelta da parte dei candidati verso una stessa traccia è ulteriormente rappresentata nell'illustrazione 9. E possibile leggere sulle ordinate il numero di commissioni in cui la traccia più quotata è stata scelta dalla percentuale di candidati appartenente all'intervallo indicato sulla categoria corrispondente. In particolare si osserva che per un piccolissimo numero di commissioni i candidati si sono equamente distribuiti nella scelta e che nella maggior parte dei casi la scelta è propensa per lo più verso la stessa traccia.

Per la costruzione del grafico, per ogni commissione è stato selezionato il massimo tra il numero di studenti che hanno scelto il primo problema e il secondo. Quindi è stata calcolata la percentuale rispetto al totale dei candidati in ogni commissione. Tale percentuale varia tra il 50% e il 100%. È stato quindi contato il numero di commissioni in cui tale percentuale cade in una delle categorie riportate sull'asse delle ascisse.



Illustrazione 9: Sulle ordinate il numero di commissioni in cui la percentuale massima di candidati che hanno scelto la stessa traccia cade nella categoria indicata sulle ascisse. Sulle ascisse gli intervalli percentuali di scelta.

## 4.2 Analisi delle sufficenze

Il riepilogo dei risultati delle valutazioni su territorio nazionale è riportato nell'illustrazione 10. Si ricorda che le insufficenze non corrispondono ad altrettante bocciature.

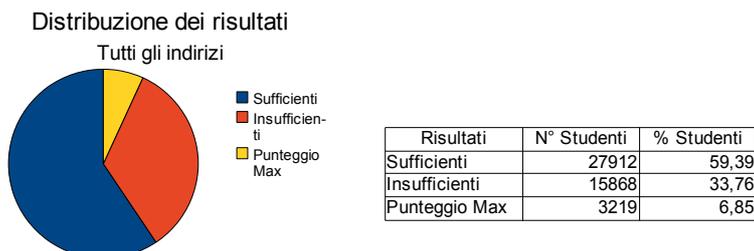
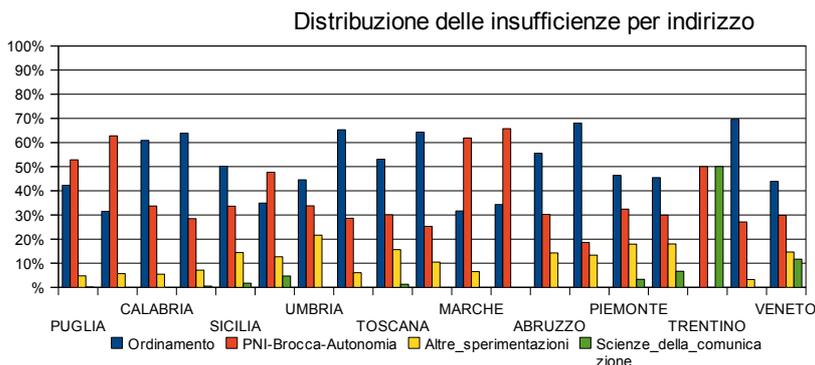


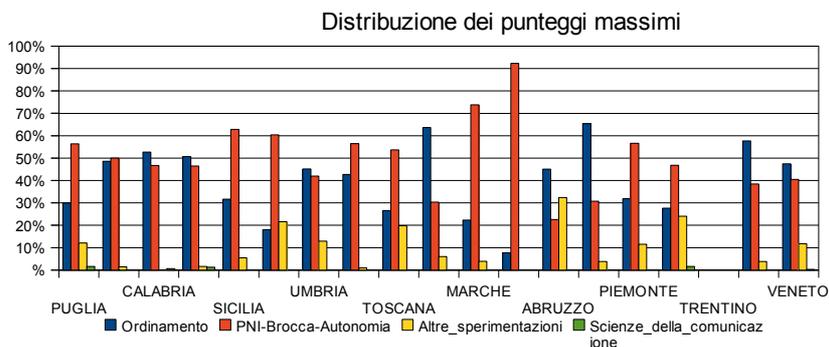
Illustrazione 10: Risultati delle valutazioni sul territorio nazionale.

Le stesse informazioni vengono riportate nelle *Illustrazioni* 11,12,13 per le diverse regioni per i diversi Indirizzi di Studi e per le diverse regioni.

Per la costruzione dell'*Illustrazione* 11 è stato contato il numero di insufficienze per ogni indirizzo in ogni regione. Ogni barra riporta per i diversi indirizzi il valore percentuale. I grafici mostrati nelle *Illustrazioni* 12 e 13 sono costruiti in modo analogo.



*Illustrazione 11: Distribuzione delle insufficienze per indirizzo di studi e per regione. La percentuale è calcolata rispetto al numero totale di insufficienze in ogni regione.*



*Illustrazione 12: Distribuzione dei punteggi massimi per indirizzo di studi e per regione. La percentuale è calcolata rispetto al numero totale di punteggi massimi in ogni regione.*

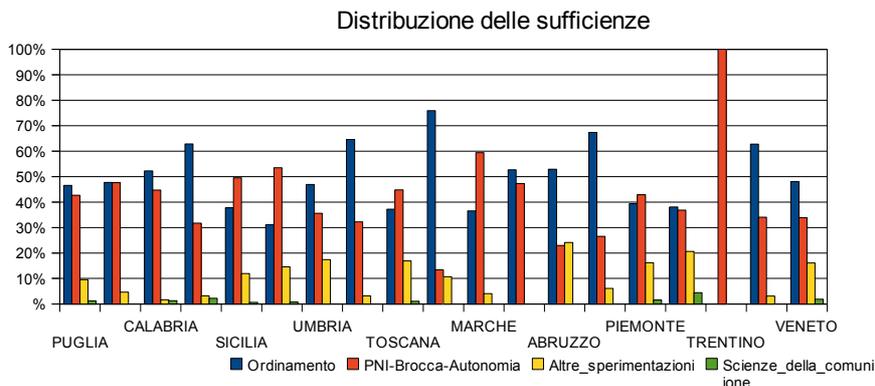


Illustrazione 13: Distribuzione delle sufficienze per indirizzo di studi e per regione. La percentuale è calcolata rispetto al numero totale di sufficienze in ogni regione.

Per i soli Indirizzi di Ordinamento e PNI-Brocca-Autonomia, nell'Illustrazione 14, viene presentato un riassuntivo della percentuale di sufficienti/insufficienti/punteggi massimi sul totale dei candidati per ogni regione. I grafici sono stati realizzati sommando per tutte le commissioni il numero dei candidati che sono stati valutati insufficienti, quelli che hanno ottenuto il punteggio massimo e la differenza tra il numero di candidati e la somma dei precedenti valori.

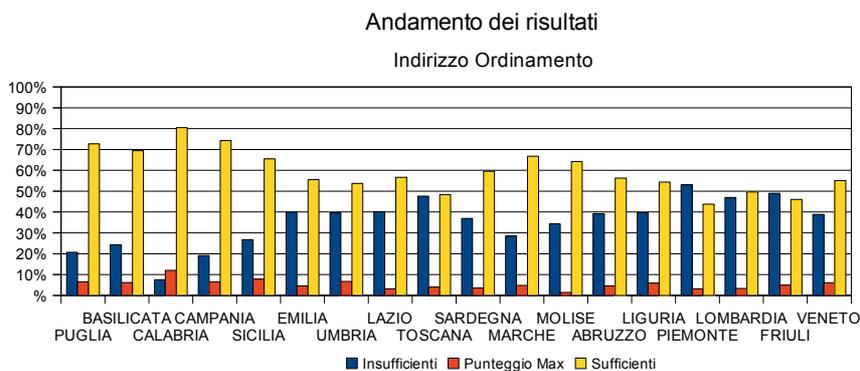
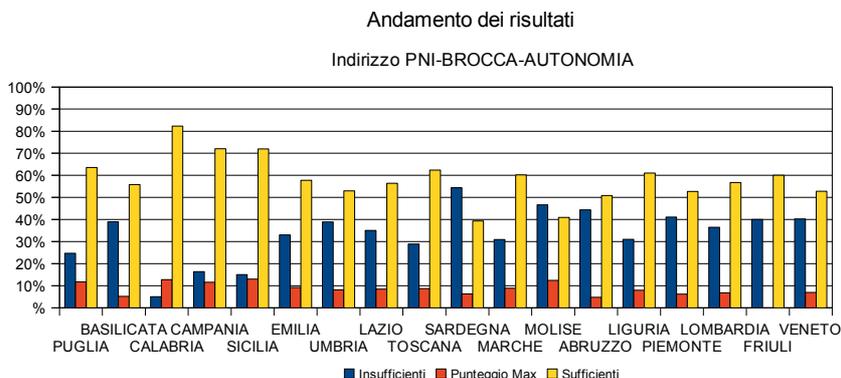


Illustrazione 14: Percentuale di Insufficienti/Sufficienti/Punteggi Massimi sul totale di candidati presentatisi in ogni regione, per l'Indirizzo di Ordinamento.



*Illustrazione 15: Percentuale di Insufficienti/Sufficienti/Punteggi Massimi sul totale di candidati presentatisi in ogni regione, per l'Indirizzo PNI-BROCCA-AUTONOMIA.*

### 4.3 Analisi delle difficoltà

Per un'analisi riguardo alle difficoltà legate a problemi e quesiti che facevano parte della prova vengono riportati i risultati dell'analisi relativi al successo dei candidati nell'affrontare problemi e quesiti. I commissari sono stati inoltre chiamati ad esprimersi sui punti più semplici o difficili della prova e sulle ragioni delle difficoltà incontrate. Essendo diverse le tracce per i diversi indirizzi di studi si presentano nel seguito i risultati nel caso di Indirizzo di Ordinamento e PNI-Brocca-Autonomia.

Come mostrato nelle Illustrazioni 16 e 17, per l'indirizzo **di Ordinamento** i problemi sono giudicati per lo più di difficoltà media. Più semplici sono considerati i quesiti. La difficoltà è dovuta alla complessità di calcolo per i problemi, mentre ad argomento non svolto per quanto riguarda i quesiti. I grafici estraggono delle informazioni sintetiche dalle risposte fornite ai quesiti compresi nelle sezioni A) e B) dell'Indagine.

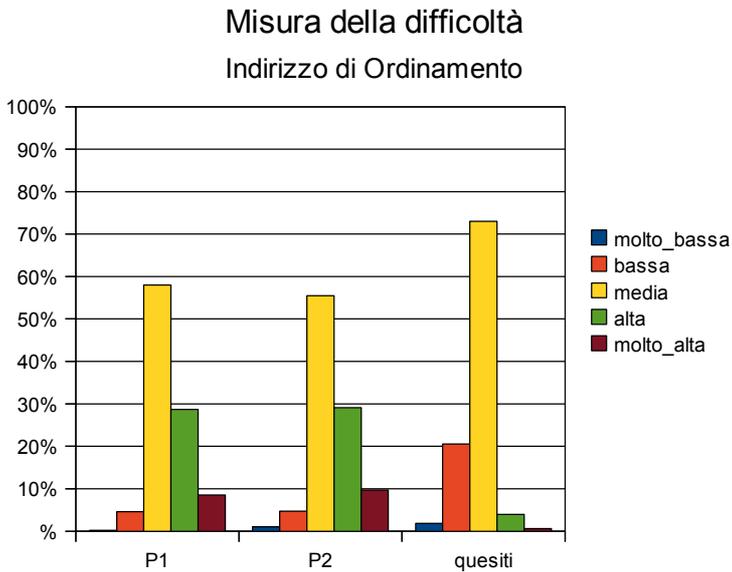


Illustrazione 16: Difficoltà nell'affrontare problemi e quesiti proposti per l'Indirizzo di Ordinamento.

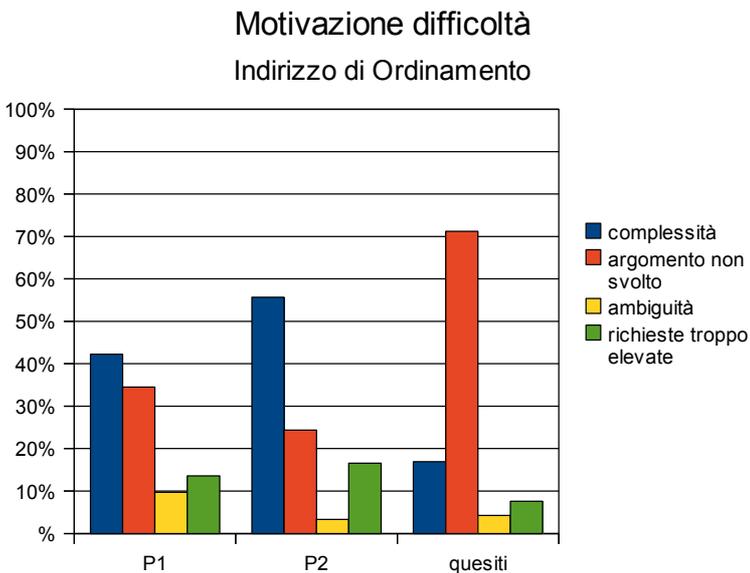


Illustrazione 17: Ragioni attribuite alla difficoltà di quesiti e problemi per l'Indirizzo di Ordinamento.

Per l'indirizzo PNI-Brocca-Autonomia analoghi risultati sono riportati nelle due illustrazioni. 18 e 19.

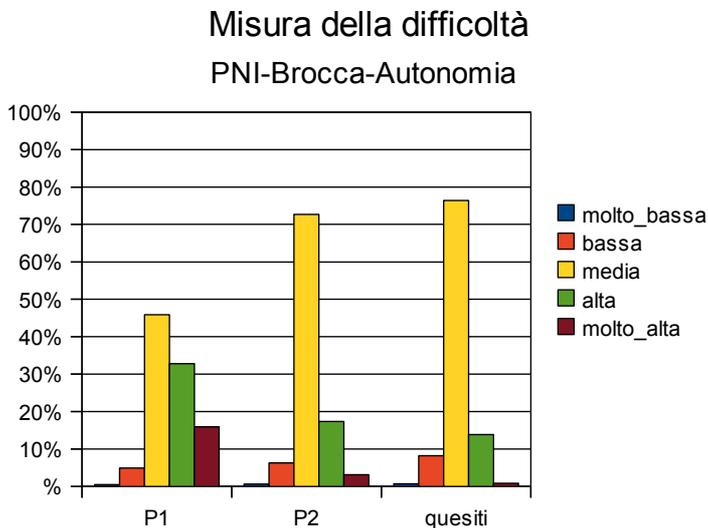


Illustrazione 18: Difficoltà nell'affrontare per problemi e quesiti proposti per l'Indirizzo PNI-Brocca-Autonomia.

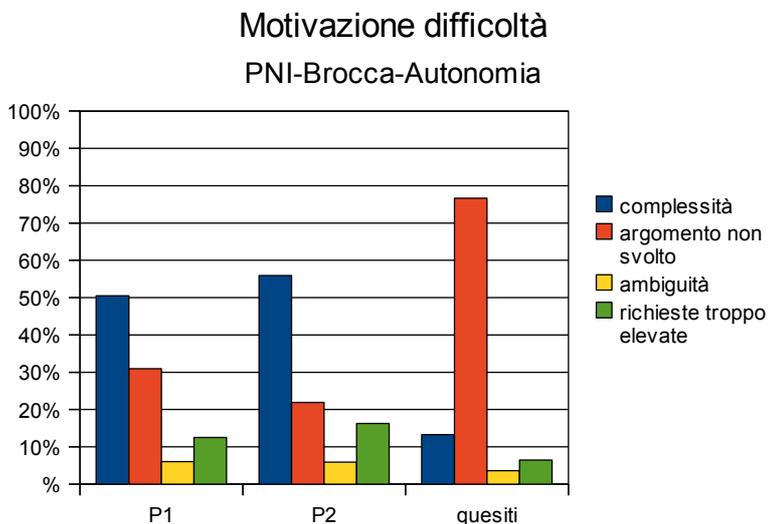


Illustrazione 19: Ragioni attribuite alla difficoltà per quesiti e problemi per l'Indirizzo PNI-Brocca-Autonomia.

Entrando nel merito dei particolari quesiti per i due diversi indirizzi. Viene indicato con “Maggior successo” il quesito che ha ottenuto il maggior numero di risposte corrette nelle diverse commissioni. Con “Più facile” viene indicato un giudizio personale del commissario che si esprimeva, indipendentemente dai risultati, sulla semplicità o sulla difficoltà stimata dei quesiti.

Le statistiche relative al successo dei candidati nell'affrontare i quesiti sintetizzano le informazioni estratte dalle risposte fornite alla sezione B) dell'indagine.

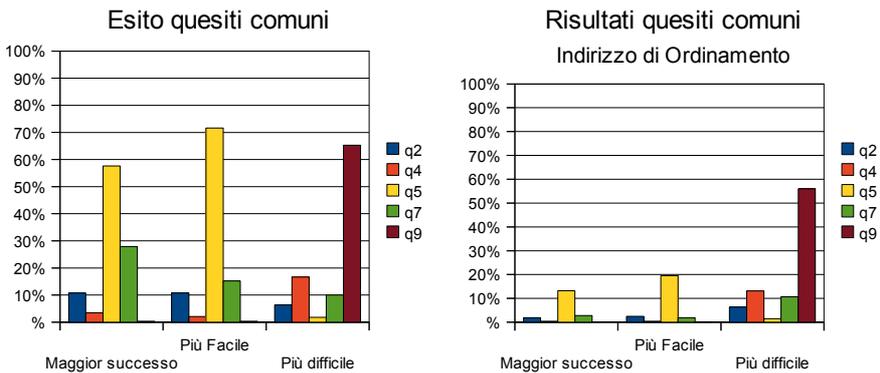


Illustrazione 20: Risultati relativi ai quesiti comuni per tutti gli Indirizzi di studi.

Illustrazione 21: Risultati relativi ai quesiti comuni per l'indirizzo di Ordinamento.

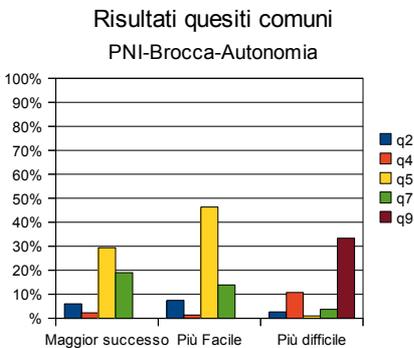


Illustrazione 22: Risultati relativi ai quesiti comuni per l'indirizzo di PNI-Brocca-Autonomia.

Come si può osservare in entrambi i casi il quesito più difficile è risultato il n. 9 (principio di Cavalieri e scodella di Galilei).

Considerando tutti i quesiti per gli Indirizzi di Ordinamento e PNI-Brocca-Autonomia, se il n. 9 rimane il più difficile, i più semplici risultano il n. 1 in un caso (funzioni derivate) e il n. 5 (operazioni possibili e forme indeterminate) nell'altro .

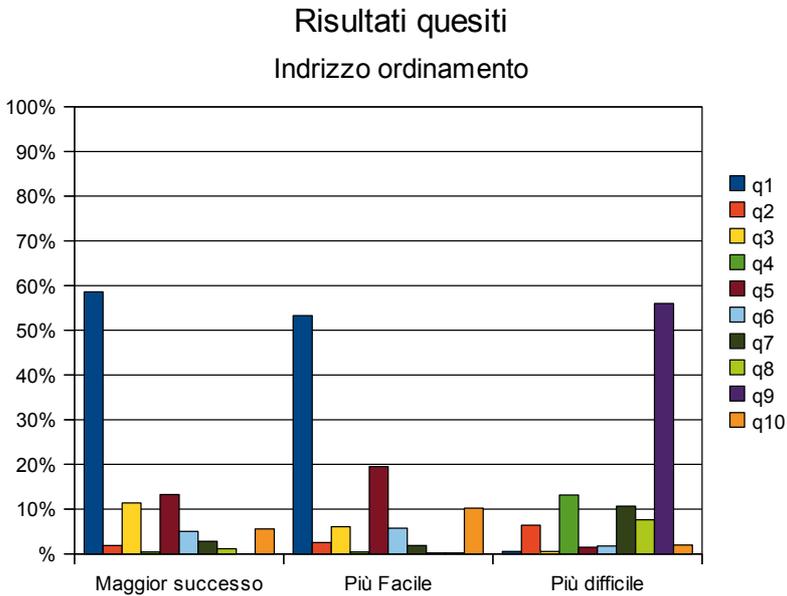


Illustrazione 23: Risultati relativi a tutti i quesiti per l'Indirizzo di Ordinamento.

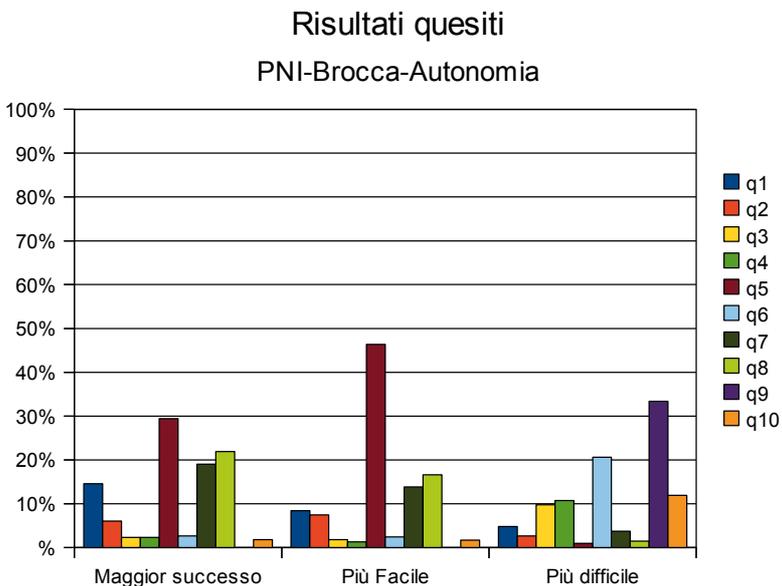


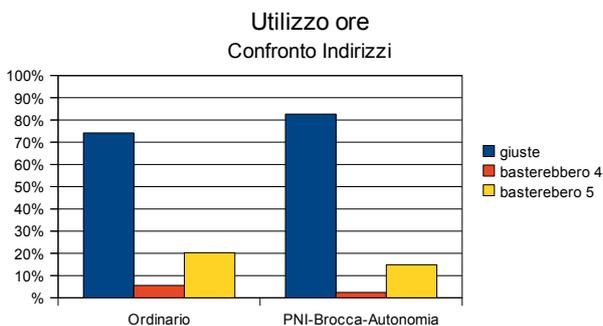
Illustrazione 24: Risultati relativi a tutti i quesiti per l'indirizzo PNI-Brocca-Autonomia.

#### 4.4 Giudizio sulla prova

Il giudizio dei commissari riguardo la struttura della prova somministrata, articolata in problemi e quesiti è riportato nell'Illustrazione 23. Come si può evincere dall'Illustrazione 24 pochi commissari hanno ritenuto che il numero di ore concesse per lo svolgimento fosse inadeguato. Tale opinione è ugualmente marcata nei due Indirizzi di Studi principali. Le statistiche caratterizzano le risposte relative ai quesiti N) e O) dell'indagine.



*Illustrazione 25: Giudizio sulla struttura della prova.*



*Illustrazione 26: Adeguatezza del numero di ore concesse per lo svolgimento della prova.*

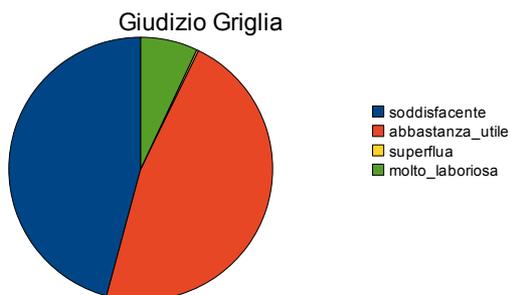
#### 4.5 Utilizzo della Griglia di valutazione proposta a livello nazionale e dagli U.S.R.

Hanno utilizzato la griglia di valutazione 437 commissioni su 2057. La percentuale di commissioni che ha utilizzato la Griglia di valutazione nelle diverse regioni è riportato nell'Illustrazione 27. Le barre sono costruite sommando le risposte affermativo fornite al quesito I) dell'indagine.

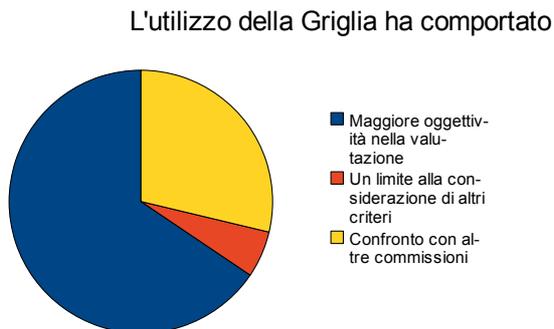


*Illustrazione 27: Numero di commissioni che hanno utilizzato la griglia per ogni regione.*

Il giudizio dei commissari riguardo l'utilizzo della griglia di valutazione è riportato nei due grafici seguenti. Per la costruzione del grafico sono state contate le diverse risposte dei commissari che hanno effettivamente utilizzato la griglia ai quesiti L) e M) dell'indagine.



*Illustrazione 28: Giudizio dei commissari riguardo la struttura della griglia.*



*Illustrazione 29: Effetti legati all'utilizzo della griglia.*

MICHELE DI NATALE  
MASSIMILIANO GIORGIO  
SALVATORE VENTICINQUE

## 5 L'indagine 2009: commenti e riflessioni

L'indagine nazionale sulla prova scritta di Matematica nei Licei Scientifici all'Esame di Stato del 2009 costituisce un importante momento di verifica degli standard di conoscenze, capacità e competenze acquisite dagli studenti di questo indirizzo alla fine del loro ciclo di studi secondari superiori. D'altra parte, data la rilevanza che lo studio della matematica ha nel Liceo Scientifico e il gran numero di componenti scolastiche coinvolte nei risultati dell'indagine (47000 alunni e 2057 commissioni), questo tipo di analisi rappresenta anche un riferimento per altri tipi di indagini relative alla matematica in altri indirizzi di studi. Scopo di quest'articolo è quello di fornire alcuni spunti di riflessione a partire dall'analisi del testo delle prove d'esame 2009 e dai risultati dell'indagine realizzata.

Come è noto, il nucleo centrale dei programmi del quinto anno del Liceo Scientifico è costituito essenzialmente dall'analisi matematica. Nello stesso tempo, la prova di matematica rappresenta una sorta di ricapitolazione delle conoscenze acquisite dagli alunni nell'intero ciclo di studi e di verifica delle loro capacità nell'utilizzare le nozioni apprese. Leggendo il testo delle prove sia dell'indirizzo di ordinamento che di quello PNI la predominanza dell'analisi matematica appare evidente, soprattutto nella parte relativa ai problemi. Invece, tra i quesiti se ne trova uno comune ai due indirizzi (il secondo) di teoria degli insiemi che in una forma quasi identica era stato proposto nella prova scritta di matematica al PNI del 2004. Inoltre, sono presenti alcune questioni di geometria solida (sui poliedri al quesito 4 in entrambi gli indirizzi e sul calcolo del volume della scodella di Galileo mediante il Principio di Cavalieri, quesito 9 di entrambi gli indirizzi). Si noti che il Principio di Cavalieri era stato oggetto anche del quesito 1 di ordinamento nel 2008. Inoltre, come nel 2007 e nel 2008 nell'indirizzo PNI è stata proposta una questione relativa alle geometrie non euclidee, inquadrata dal punto di vista storico. Il quesito 9 è stato giudicato come il più difficile. Anche gli altri due quesiti di geometria sopra citati sono stati ritenuti di una certa difficoltà e pochi alunni li hanno risolti correttamente. Non sorprendono questi dati, visto che lo studio della geometria sintetica, soprattutto quella solida, è quasi del tutto sparito dai programmi svolti (nella geometria analitica certi teoremi di geometria compaiono in modo camuffato). Come pure ha riscosso poco successo il quesito 2 sulla ricerca delle funzioni iniettive, suriettive e biettive fra due insiemi finiti assegnati.

Per quanto riguarda i problemi, la scelta degli studenti di ordinamento si è orientata principalmente sul primo, probabilmente perché formulato in modo abbastanza simile al primo problema di ordinamento del 2008. Invece, per il PNI, è prevalsa nettamente la scelta del problema 2. Una spiegazione di ciò potrebbe essere legata alla funzione del primo problema, definita mediante una somma (parziale di una serie) dipendente da un parametro in cui compare il fattoriale.

Un dato interessante su cui occorre sicuramente riflettere è la constatazione che

nella distribuzione dei risultati della prova, sia di ordinamento che PNI, la sufficienza è presente in percentuale più alta nelle regioni meridionali con punte dell'80% in Calabria dove si assiste anche alla percentuale più alta di punteggi massimi. Questo fenomeno andrebbe probabilmente valutato anche alla luce del contesto socio-economico in cui si sviluppa.

L'indagine realizzata ci fornisce lo spunto per sviluppare alcune riflessioni sia sul tema delle competenze di matematica in uscita dalla scuola secondaria superiore con particolare riferimento al liceo scientifico, sia sul difficile, ma al tempo stesso affascinante, tema dell'insegnamento-apprendimento della matematica. Ricordiamo innanzitutto la definizione attualmente più utilizzata di competenza matematica (adoperata anche nell'ambito del Progetto OCSE-PISA):

*«La competenza matematica è la capacità di un individuo di cogliere e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino impegnato, che riflette e che esercita un ruolo costruttivo».*

Come si vede, una persona che ha competenze di matematica dovrebbe conoscere le grandi potenzialità che essa offre ed essere in grado di usarle in molteplici situazioni che gli si presentano nella vita quotidiana e professionale. È interessante notare come le precedenti parole esprimano in modo chiaro l'importanza e la centralità che viene data alla matematica nei processi cardine della società moderna. Quest'ultimo aspetto si può cogliere anche nelle dichiarazioni fatte da molti esponenti del mondo economico e politico del nostro paese. Tuttavia, come metteva in guardia N. Melone della Seconda Università di Napoli in un dibattito tenutosi lo scorso anno nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche, *«le competenze matematiche sono fatte di saperi e non di prassi, in quanto le conoscenze scientifiche-tecnologiche progrediscono rapidamente ed il rischio di obsolescenza è elevato. Oggi è indispensabile non soltanto “saper come”, ma anche e sempre più “sapere cosa e perché”, avere cioè un atteggiamento critico, razionale e la capacità di auto-aggiornarsi».* Questo spiega perché molti studenti hanno incontrato difficoltà nella prova di matematica quando si è trattato di dimostrare certe affermazioni, di spiegare il *perché*, mentre si sono trovati più a loro agio nel *saper come*, cioè nell'applicazione meccanica di un procedimento.

Qual è la situazione attuale nella scuola italiana per quel che riguarda la matematica e il suo insegnamento? La recente indagine OCSE-PISA 2006 evidenzia che i quindicenni italiani sono al 38° posto per le competenze matematiche sui 57 paesi che hanno partecipato all'indagine. Questa situazione di difficoltà si riscontra anche analizzando le prove di ingresso ai corsi di laurea (ormai obbligatorie in tutti i gli indirizzi di studio in attuazione del D.M. 270). Spesso i contenuti vengono assorbiti dallo studente medio in maniera meccanica e superficiale, privilegiando lo sviluppo di

capacità pratiche di risoluzione di un problema rispetto alla comprensione del problema stesso. Capita con una certa frequenza di scoprire come studenti neo-immatricolati abbiano difficoltà di comprensione della struttura di un enunciato matematico, dei ruoli di ipotesi e di tesi, dell'utilizzo della prima e della negazione della seconda. D'altra parte, un'analogia carenza logica è spesso presente in modo chiaro nelle comuni argomentazioni che si possono ascoltare nei luoghi pubblici oppure che sono diffuse dagli strumenti di comunicazione di massa, anche quando elaborate da soggetti di estrazione culturale medio-alta. Tutto ciò con un'ovvia ricaduta negativa a livello sociale. L'indagine OCSE-PISA sopra menzionata mostra come sia utile fissare l'attenzione sull'analisi della prova scritta di matematica nei licei scientifici dove dovrebbe essere presente una più forte motivazione da parte degli studenti.

Rispetto a questa situazione non è facile individuare delle soluzioni che possano risolvere i problemi menzionati e molti altri di cui si potrebbe parlare. Tuttavia, proveremo qui di seguito a fare qualche proposta:

1. L'insegnamento-apprendimento della matematica non deve essere volto soltanto al raggiungimento di competenze di carattere puramente strumentale. Questo perché, come è documentato storicamente, la conoscenza se ha come unico fine l'utile non va molto lontano; e questo vale ancora di più per la matematica, la cui *«vera essenza è nella sua libertà»* (G. Cantor). Si ricordino, a tal riguardo, anche le parole di E. De Giorgi: *«Penso che la matematica non serva tanto all'ingegnere, al fisico, all'economista come strumento per risolvere determinati problemi, ma serva piuttosto come quadro ideale fuori del quale non sarebbe nemmeno possibile impostare molte questioni di ingegneria, fisica, economia, ecc. Così non credo che Keplero avrebbe potuto affermare che le orbite dei pianeti sono ellissi, di cui il sole occupa uno dei fuochi, se molti secoli prima di lui i matematici greci (in particolare Apollonio) non avessero elaborato una raffinata teoria delle coniche...»*. Dunque l'insegnamento della matematica dovrebbe fornire un atteggiamento mentale, una forma mentis, che abitui lo studente a trovare la strada più breve nel momento in cui si trova ad affrontare un problema.
2. Occorre ridurre ed uniformare i contenuti degli attuali programmi, costruiti autonomamente dai docenti sulla base di Indicazioni Nazionali, privilegiando (come già si ricordava nel documento introduttivo della legge sul riordino del 2001) la qualità alla quantità, eliminando tutto ciò che è arido nozionismo. I ragazzi prima della tecnica e del calcolo (sicuramente utili) hanno bisogno del bello, e in questo la matematica è di grande aiuto. Come diceva G. H. Hardy *«non c'è vera matematica se non c'è la bellezza»*.
3. Per essere pronti per l'attuazione della riforma del secondo ciclo, che dovrebbe partire a settembre di quest'anno, occorre *«precisare in modo chiaro e comprensibile per tutti quali sono le mete, i traguardi di conoscenze, abilità e competenze che la collettività richiede essenziali da apprendere. Bisogna con-*

*trollare il processo di apprendimento a livello territoriale. È necessaria una organizzazione amministrativa più attenta a quello che avviene nelle aule... È necessario procedere alla valorizzazione della professionalità docente »*

(E. Ambrisi).

È in pieno sviluppo il dibattito circa l'individuazione di un nucleo essenziale di competenze matematiche comuni a tutti gli studenti alla fine della scuola secondaria superiore. In molti convergono sulle seguenti:

- a) *Sviluppare dimostrazioni e riconoscere il legame deduttivo tra proposizioni di un determinato ambito.*
- b) *Utilizzare i metodi e gli strumenti dell'analisi matematica.*
- c) *Affrontare situazioni problematiche in contesti diversi avvalendosi dei modelli e degli insegnamenti matematici più adeguati.*
- d) *Utilizzare i metodi e gli strumenti della probabilità e della statistica.*
- e) *Cogliere il valore socio-storico-culturale della matematica e riconoscerne il contributo allo sviluppo delle Scienze e della Cultura.*

Noi crediamo che alle precedenti competenze di base vada aggiunto qualche aspetto di algebra moderna, e ciò almeno per due ragioni. La prima è di carattere storico. Non è pensabile che un ragazzo al termine della scuola secondaria superiore possa credere che l'algebra sia sostanzialmente la teoria delle equazioni algebriche. Come è noto, ciò non è vero dai tempi di E. Galois (1811-1832) il quale con l'introduzione del concetto di gruppo ha tradotto il problema della risolubilità per radicali delle equazioni algebriche in un problema relativo al gruppo delle permutazioni delle sue radici. Ciò ha avviato un processo prodigioso in cui il potere unificante dei gruppi ha permesso di ottenere dei risultati importantissimi in vari settori della matematica (si pensi alla classificazione gruppale delle geometrie di F. Klein ottenuta nel 1872). In generale, in tutti i settori in cui la simmetria è importante (come in fisica atomica o in cristallografia) la teoria dei gruppi si è rivelata uno strumento di analisi molto potente. Il secondo motivo si può rinvenire nel grande potere formativo che l'algebra può avere nell'insegnamento della matematica. Si pensi alla nozione di funzione che pervade il programma di matematica dell'intero ciclo di studio del Liceo Scientifico. Sarebbe molto produttivo ed efficace inquadrare da subito tale argomento nell'ambito della teoria degli insiemi presentando molteplici esempi concreti e non solo numerici. Spesso invece gli insiemi e le strutture algebriche, qualora si accenni ad essi, finiscono con l'essere un corpo estraneo all'interno del percorso matematico insegnato. Questo spiega perché, ad esempio, un quesito come il secondo (sulle funzioni) non abbia ottenuto molto successo. Analogo discorso va fatto per la geometria il cui studio va sicuramente rinvigorito nell'ottica di attuare il punto (a) prima ricordato.

Concludiamo queste poche osservazioni soffermandoci su quella che, in un certo senso, rappresenta l'altra faccia della medaglia. Molti dei problemi che gli alunni

presentano alla fine del ciclo di studi secondari superiori, e che anche la presente indagine ha confermato, sono legati al modo in cui i loro docenti sono stati formati all'università quando hanno frequentato i Corsi di Laurea in Matematica. Occorre purtroppo ammettere che ancora oggi l'organizzazione didattica di molti di tali corsi risente fortemente della netta suddivisione in settori disciplinari iperspecializzati, retaggio di una passata spartizione di potere non solo culturale. Non c'è la minima collegialità nella definizione dei programmi da proporre agli studenti. Quando nei Consigli di Corsi di Studi si prepara la programmazione didattica per il successivo anno accademico di rado ci si sofferma sui contenuti dei corsi. Ciò ovviamente rende problematica da parte degli studenti l'acquisizione di una visione di insieme delle tematiche sviluppate nei diversi corsi. Attualmente, dopo la fine dell'esperienza non certo esaltante delle SISS, il d.d.l. sulla formazione degli insegnanti è in una fase di stallo. Nella riunione della Conferenza Nazionale dei Presidi di Scienze e Tecnologia tenutasi a Roma il giorno 11 dicembre 2009 è stato istituito un gruppo di lavoro con l'intento di arrivare ad un punto di svolta. Come si vede c'è molto da fare. Occorre progettare una laurea magistrale che recuperi l'unitarietà del sapere matematico e che, a livello ministeriale, si investano risorse per dare dignità alla didattica della matematica pari a quella della ricerca di base. Solo in questo modo i futuri docenti saranno in grado di gestire il proprio sapere e potranno sfruttare la riconosciuta autonomia nella elaborazione dei programmi di matematica. Ciò potrà innescare un ciclo virtuoso in cui inserire proficuamente momenti di verifica quali ad esempio le prove scritte di matematica al Liceo Scientifico.

FRANCESCO DE GIOVANNI  
ALESSIO RUSSO

## 6 I contenuti della prova di esame: di anno in anno, una cinquina al lotto?

Nel percorso di studi degli allievi del liceo scientifico la prova scritta di matematica costituisce un momento particolarmente importante, sia dal punto di vista culturale che da quello emotivo. Ogni anno, migliaia di ragazzi affrontano il tema di matematica come prova caratterizzante, sia nell'indirizzo di ordinamento che nelle sperimentazioni e, a dire il vero, non c'è prova d'esame più temuta.

Perché la maggior parte degli studenti si sente abbastanza tranquilla nell'affrontare la prova di italiano e vive un vero e proprio "incubo" pensando alla matematica? Osservando la percentuale dei debiti riportati a fine anno nel liceo scientifico, è abbastanza scontato concludere che il livello medio delle conoscenze e delle competenze raggiunto dagli studenti non è adeguato. Del resto, anche gli allievi più "bravi" affrontano la prova con grande preoccupazione.

### 6.1 Analisi delle prove e competenze richieste

Il problema 1 di ordinamento è stato giudicato dai più *fattibile con una preparazione media*. I quesiti sono abbastanza indipendenti ed interessanti perché richiedono riflessioni su concetti elementari di geometria euclidea e trigonometria, non appesantiti da calcoli laboriosi o da dimostrazioni di carattere nozionistico. In particolare, si nota che il calcolo del volume (richiesto nel punto 4) impegna gli studenti con riflessioni intuitive, ma anche con semplici conoscenze, purtroppo trascurate nella scuola, dei fondamenti di geometria solida basati sul Principio di Cavalieri. L'assegnazione di tale quesito si può considerare come uno stimolo ai docenti per educare i ragazzi allo studio del mondo tridimensionale attraverso le figure piane.

Il problema 2 di ordinamento porta a valorizzare l'intuizione piuttosto che la memoria. Sicuramente può considerarsi un valido modello di riferimento per la didattica, che fa interagire gli aspetti grafici con gli aspetti metodologici, della geometria analitica e dell'analisi. La proposta di questo tema offre la possibilità al docente di richiamare, *in una sola lezione*, i concetti di funzioni elementari, questioni metriche ed analitiche relative all'equazione della retta, di derivata come coefficiente angolare della retta tangente, al fine di valorizzare la capacità di raccogliere informazioni direttamente dalla lettura del grafico.

La funzione  $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$  del problema 1 del PNI ha suscitato non poche perplessità, facendo evocare il polinomio di Taylor di grado  $n$  della funzione  $e^x$  sviluppato per  $x=0$ . In realtà, con i dati del problema si comprende che la funzione da studiare è il prodotto di un polinomio per l'esponenziale  $e^{-x}$ , esattamente

dello stesso tipo di alcuni temi assegnati negli anni precedenti. Ne è un esempio il tema di ordinamento del 1992 in cui la funzione era  $f(x) = (2x^3 - 4x)e^{-x^2}$ .

Anche il problema 2 del PNI /2009, lo studio della funzione  $f(x) = x^3 + kx$  al variare di  $k$ , figura già assegnato nella prova suppletiva dell'indirizzo sperimentale magistrale del 1998. L'argomento è stato riproposto, anche se in modo apparentemente diverso, nel quesito 8 del tema di ordinamento del 2001.

Si chiedeva, inoltre, di approssimare a meno di 0,1 l'ascissa del punto  $P$  comune alla cubica ed alla retta, con un metodo iterativo di calcolo; anche questa richiesta è ormai diventata ricorrente ed impegna gli studenti alla conoscenza di teoremi fondamentali di analisi matematica applicata all'analisi numerica. Nei temi degli ultimi sette anni, l'argomento è stato sempre presentato; particolarmente interessante, a tal proposito, il quesito n.7 del tema PNI/2002 in cui si chiede di provare l'esistenza di un numero  $\alpha$  compreso tra 0 e 1 in cui la funzione  $f(x) = e^x - \sin x - 3x$  risulta nulla. Il quesito, oltre all'applicazione del teorema degli zeri, porta gli allievi ad utili riflessioni sul confronto di funzioni di natura diversa.

La trattazione in aula dei temi assegnati negli ultimi decenni è fondamentale per la preparazione degli allievi, in quanto le tracce che negli anni si sono susseguite raccontano una storia di "continuità".

Pertanto, è abbastanza fuor di luogo discettare che occorre: *"indicare dall'inizio dell'anno i contenuti da trattare nell'ultimo anno per evitare che la prova di matematica rimanga una cinquina al lotto!"*.

In realtà, analizzando le prove si possono evidenziare delle richieste divenute, oramai, "classiche":

- Problemi che richiedono di determinare il valore massimo o minimo di una grandezza che si può rappresentare come una funzione derivabile di una opportuna variabile.
- Problemi geometrici di 1° e 2° grado dipendenti eventualmente da un parametro.
- Determinazione dell'equazione della tangente al grafico di una funzione.
- Applicazione dell'integrazione al calcolo delle aree e dei volumi.
- Studio di funzioni e relativo diagramma cartesiano.
- Calcolo del numero di soluzioni di un'equazione e, nel PNI, anche approssimazione delle radici.
- Calcolo combinatorio.
- La determinazione della probabilità di un evento nel PNI.
- Calcolo del volume di solidi dei quali siano note le sezioni lungo una assegnata direzione.

Questi sono solo alcuni degli argomenti che ricorrono nella prova.

## 6.2 Considerazioni su alcuni argomenti non tradizionali

Relativamente ai contenuti, vogliamo porre l'accento su quelli che, da varie statistiche, risultano poco trattati; in particolare:

- *Calcolo della probabilità*
- *Statistica*
- *Trasformazioni geometriche*
- *Geometrie non euclidee*

Tali argomenti meritano una maggiore attenzione per i seguenti motivi:

- lo studio della “Probabilità” e della “Statistica” è essenziale per la formazione di giovani, in un mondo dominato dall'incertezza, dalle necessità di ragioni e azioni di natura probabilistica che, in una società complessa, implicano problemi di scelta;
- le “Trasformazioni geometriche” permettono di cogliere l'Universo nelle sue rappresentazioni dinamiche, e le sue possibili evoluzioni nello spazio e nel tempo. Si può discutere su quale geometria sia più adatta per studiare un certo fenomeno, ma non si può ignorare che la geometria euclidea è insufficiente a studiare la natura del mondo che ci circonda. Infatti, il primo ampliamento della geometria euclidea alla geometria proiettiva ha condotto alla razionalizzazione dell'Arte attraverso le Trasformazioni lineari, mentre i modelli su spazi curvi sono utilizzati in tutti i risultati ottenuti dalla Fisica moderna nel XX secolo e dall'Architettura contemporanea.

### 6.2.1 La matematica dell'incerto

Dalla tabella 1 si può analizzare la frequenza dei problemi e dei quesiti, che prevedono conoscenze-competenze di calcolo combinatorio, probabilità e statistica nelle prove assegnate alle sessioni PNI degli esami di stato negli ultimi 7 anni.

Si evince che è sempre possibile ottenere il massimo punteggio alla prova senza alcuna conoscenza di tali argomenti.

È importante, invece, sottolineare che:

- alla fine del quinquennio della Scuola Secondaria di secondo grado, gli allievi devono essere preparati ad affrontare e risolvere problemi legati all'incertezza;
- i docenti devono considerare patrimonio di conoscenze le tematiche legate alla Statistica ed alla Probabilità che, del resto, sono già inseriti nelle indicazioni ministeriali per l'insegnamento;
- la scuola deve fornire agli studenti gli strumenti necessari a questo scopo.

È evidente che tali osservazioni sono tra loro consequenziali, perché la preparazione degli allievi è legata alla determinazione ed alla capacità dei docenti di proporre tali tematiche; la preparazione non è stata sempre garantita dai corsi universitari, essendo fino a pochi anni fa facoltativi nei piani di studio gli esami di Calcolo delle Probabilità e Statistica.

Addirittura in alcune Scuole di Specializzazione Interuniversitarie (SSIS) non sono stati affrontati tali argomenti, per cui alcuni docenti insegnano Matematica (o Matematica e Fisica) senza aver mai avuto un minimo approccio con la Matematica dell'incerto. Precisamente, per questo settore manca nella formazione una metodologia assiomatica di base, per cui le tematiche si affrontano in modo euristico, partendo direttamente dalla risoluzione degli esercizi, al contrario di quello che avviene, ad esempio, per l'insegnamento della geometria. È, dunque, essenziale **la progettualità di un percorso che, distribuito sui cinque anni di corso, possa permettere di introdurre gli argomenti seguendo un processo logico analogo a quello che si utilizza per insegnare le altre branche della matematica.**

Tabella 1

Anno	Problemi con statistica e probabilità	Quesiti con statistica e probabilità
2008	0/2	2/10
2007	0/2	2/10
2006	0/2	2/10
2005	0/2	3/10 (di cui 1 di teoria di calcolo combinatorio)
2004	Solo qualche collegamento nel punto 4 del I problema	0/10
2003	0/2	2/10 (di cui uno di analisi combinatoria)
2002	0/2	3/10

Analizziamo un quesito assegnato agli esami di Stato nella sessione 2007:  
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della Matematica illustrando il significato di  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma^2$  e come tali parametri influenzino il grafico di  $f(x)$ .

Questo quesito è stato ritenuto difficile ed in parte estraneo ai programmi ministeriali.

È evidente che bisogna conoscere alcuni elementi che non si possono estrarre direttamente dalla formula:

- la media aritmetica  $\mu$ ;
- lo scarto quadratico medio;
- la varianza  $\sigma$ .

Questi concetti sono legati al processo logico che è alla base della costruzione della funzione. Inoltre, occorre conoscere l'andamento della funzione esponenziale e l'andamento delle funzioni a campana.

Già nel primo biennio si possono proporre agli allievi esercitazioni sulla costruzione di semplici grafici di questo tipo relativi a fenomeni che fanno riferimento al quotidiano.

Proponendo i primi elementi analitici di Statistica Descrittiva attraverso degli esempi e successivamente le funzioni elementari, si è in grado di affrontare con padronanza il quesito assegnato, che riteniamo significativo ed interessante. Un discorso analogo va fatto per il Calcolo delle Probabilità, partendo, già dal primo biennio, con giochi di dadi, carte e classifiche dei campionati di calcio.

## 6.2.2 Le Trasformazioni geometriche

Nella sessione ordinaria agli esami di Stato 1988, uno dei problemi assegnati è il seguente:

*Si studi la trasformazione:*

$$\begin{cases} X = 2x + 2 \\ Y = \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

*e, tra l'altro, si dimostri che:*

- 1) *le aree dei due triangoli che si corrispondono nella trasformazione sono uguali;*
- 2) *le due parti di piano limitate da una retta e da una parabola e, rispettivamente dalla retta e dalla parabola ad esse corrispondenti in tale trasformazione, sono equivalenti.*

La trasformazione va oltre la geometria euclidea, in quanto rappresenta un'affinità che non trasforma circonferenze in circonferenze, per cui non rientra nel gruppo delle similitudini.

Si tratta di un tema assegnato nella sessione ordinaria e, addirittura 22 anni fa, quando non erano ancora nati gli studenti che hanno affrontato l'esame di stato negli ultimi tre o quattro anni.

Nessuno ebbe da ridire perché bastava risolvere l'altro problema (che trattava di analisi) per superare l'esame anche con il massimo dei voti e quasi tutti coloro che affrontarono questo problema (per la verità, in pochi) non compresero nemmeno il

significato delle richieste che avrebbero permesso risoluzioni immediate con semplici conoscenze dell'argomento.

La tabella 2 ci indica la frequenza dei problemi e dei quesiti, nelle prove assegnate negli ultimi 7 anni, che prevedono conoscenze e competenze relative agli ampliamenti della geometria euclidea alle altre geometrie sviluppate negli ultimi due secoli (trasformazioni geometriche e geometrie non euclidee).

A questi argomenti si dovrebbe dare maggiore spazio, in entrambi gli indirizzi, in quanto:

- essenziali per una formazione che conduca a individuare la geometria come base di studio per l'universo che ci circonda: ciò significa che una concezione dinamica di essa non può essere più ignorata;
- permettono al docente di proporre un'analisi storica dell'evoluzione della matematica dal periodo ellenico ad oggi, in modo da far comprendere agli allievi i travagli, ma anche il contributo di "errori storici", che hanno consentito di legare logicamente i vari risultati;
- danno la percezione che l'utilizzo delle tecniche informatiche è basato sulla geometria proiettiva.

Tabella 2

Anno	Problemi con Trasformazioni geometriche e geometrie non euclidee	Quesiti con Trasformazioni geometriche e geometrie non euclidee
2008	0/2	2/10
2007	0/2	2/10
2006	0/2	1/10
2005	1/2	2/10
2004	0/2	2/10
2003	1/2	0/10
2002	1/2	1/10

### 6.3 Conclusioni

Dall'analisi dei temi appare evidente che il punto di domanda ruota intorno ai contenuti: possiamo svolgere programmi più snelli senza perdere la ricchezza e la complessità del pensiero matematico e, al tempo stesso, rendere più *fattibile* la seconda prova dell'esame di stato del liceo scientifico? Dedicare l'ultimo anno allo *studio di funzione* e all'analisi matematica non è una scelta errata in assoluto. Lo diventa, però, se questo diviene l'unico percorso seguito e, soprattutto, se ciò avviene in modo ripetitivo, quasi esasperato. È indubbiamente opportuno che gli allievi si esercitino anche a risolvere problemi e questioni che richiedono applicazione di concetti o

procedure, ma lo è ancor di più l'abitarli a *dimostrare* e *dedurre*.

Umanizzare la disciplina, cercarla nelle pieghe della realtà quotidiana è quanto emerge nell'analisi dei temi negli ultimi dieci anni; si nota una tensione in tal senso che vede una linea di continuità proprio nella ricerca di approcci diversificati ad analoghe questioni. Il riferimento, spesso, alla storia della matematica e alla fisica ne sono una valida testimonianza.

FERDINANDO CASOLARO  
MARIA COCOZZA  
ANNA MARIA PEZONE

## 7 Problematiche emerse dall'analisi dei commenti dei commissari

Il questionario Matmedia si conclude con la richiesta di un commento libero sulla prova di matematica. Quasi tutti i commissari hanno dato un contributo la cui lettura fornisce uno spaccato della situazione attuale dell'insegnamento della matematica nelle scuole ad indirizzo scientifico. In generale, si può osservare che i commenti, spesso, sono contraddittori, antitetici. Da ciò si potrebbe dedurre che la classe dei docenti di matematica non possiede una preparazione professionale uniforme o al contrario dedurre la ricchezza di professionalità.

In ogni caso, i commenti sono l'espressione di bisogni dei docenti. Innanzitutto si nota una difficoltà a condurre gli allievi agli obiettivi indispensabili per affrontare la prova che è ritenuta, in generale, adeguata.

Se ne deduce l'esigenza di trovare percorsi didattici motivanti e che riescano ad ottimizzare i tempi per il raggiungimento delle competenze necessarie. Sappiamo che da poco il MIUR ha pubblicato gli obiettivi finali che l'allievo della scuola secondaria di secondo grado deve raggiungere a conclusione dei cinque anni. In tal modo viene completamente superato il concetto di programma come sequenza lineare di argomenti e si può dare una risposta significativa all'esigenza posta dai docenti.

Sono presenti, tra i commenti dei commissari, anche indicazioni metodologiche in cui si sottolinea la necessità di dedicare più tempo alla didattica per problemi che viene considerata più formativa e si inserisce nella prospettiva europea (indagine OCSE-PISA).

Sono, in generale, accettati e apprezzati anche quei quesiti in cui si chiede di argomentare, spiegare. I docenti hanno compreso che è indispensabile, rispetto ad una didattica "tradizionale", adottare metodi di insegnamento che siano finalizzati alla comprensione dei nodi concettuali matematici e non solo al puro calcolo, sia pure di una certa complessità. Va notato, a tal proposito, che tali quesiti rappresentano una delle varie evoluzioni delle prove di matematica se si confrontano con quelle che, sostanzialmente, facevano riferimento al "famoso" problema di Tartinville.

È presente l'esigenza di un Syllabus che orienti in maniera più precisa i docenti a preparare gli allievi alla prova.

Interessanti, infine, i commenti sulla valutazione in quanto non esplicitamente richiesti. Essi esprimono l'esigenza di un criterio che renda la valutazione della prova più omogenea e più confrontabile. A tal proposito va citata l'iniziativa degli Uffici Scolastici di 16 regioni che hanno proposto la stessa griglia di valutazione, sicché per la prima volta circa 500 commissioni hanno valutato con le stesse modalità.

## 7.1 Il libro di testo

Gli argomenti oggetto delle prove di esame sono presenti in tutti i libri di testo; anche la “*Sezione aurea*” è un argomento che i testi trattano, contrariamente a quanto da qualcuno sostenuto anni addietro. Forse se c’è un appunto da fare ai libri di testo e quindi ai loro autori, ed è che spesso sono dispersivi, nel senso che si dilungano anche su questioni su cui si potrebbe sorvolare. A volte troppi esercizi non sono altro che una noiosa riproposta dello stesso esercizio. Perché non insistere su esercizi e problemi veramente significativi e perciò più stimolanti? Un testo più snello sarebbe più accattivante per uno studente che, tra l’altro, ha problemi nell’interpretazione del linguaggio specifico della disciplina. Peraltro va precisato che, da alcuni anni, diversi autori hanno inserito nei loro testi delle sezioni dedicate ai problemi e ai quesiti proposti agli esami di stato.

MICHELANGELO DI STASIO

## 7.2 Lo studio teorico

I quesiti d’esame presuppongono solo conoscenze e competenze di carattere tecnico? Richiedono solo la padronanza di regole e procedure avulse da qualsiasi principio teorico che le rende applicabili? Se così fosse se ne ricaverebbe un’immagine della matematica estremamente riduttiva: un insieme di regole che per vie misteriose portano a risultati che sono sicuramente da accettare ma che sono del tutto incomprensibili come lo è l’apparizione del coniglio dal cappello a cilindro di un prestigiatore.

Fine ultimo della scuola è la formazione integrale della persona, e in questo processo la matematica ha sicuramente un ruolo di primo piano. Perché questo sia vero non bisogna, però, limitarsi allo studio ed alla conseguente assimilazione di conoscenze, per così dire, tecniche: non solo formule o metodi applicativi di immediato utilizzo ma acquisizione di una solida base teorica. In quest’ottica la matematica ha un alto ruolo formativo che va ben al di là di una mera acquisizione di conoscenze. Il suo studio, infatti, educa la mente a:

1. Giustificare e motivare con chiarezza ogni tipo di affermazione;
2. Saper individuare l’ambito di validità di regole e principi;
3. Saper distinguere ciò che è essenziale da ciò che non lo è;
4. Saper cogliere il ruolo e l’efficacia delle premesse e saper valutare ciò che succede se esse vengono meno parzialmente o totalmente;
5. Esporre con chiarezza e consequenzialità logica il proprio pensiero.

In sostanza nelle sue caratteristiche generali la matematica è un potente mezzo di organizzazione del pensiero che serve anche a chi non si interesserà mai più di matematica perché impegnato, nella vita, in altri e lontani settori; la logica dimostrativa di un teorema sarà utile infatti all’avvocato che dovrà costruire un’arringa chiara,

coerente e fortemente convincente; capire, nel corso di una dimostrazione, quando e in che misura è essenziale un'ipotesi sarà utile al medico che dovrà saper individuare, in un quadro clinico complesso, le cause (ipotesi) di una certa patologia (tesi) e prescrivere, quindi, accertamenti mirati evitando indagini cliniche non necessarie, stressanti per il paziente e costose per la società.

Lo studio della matematica, che non sia ripetizione meccanica ed acritica di regole, è uno strumento altamente efficace per stimolare la concettualizzazione intesa come acquisizione consapevole di conoscenze e competenze. Nessuna disciplina come la matematica, se correttamente proposta, favorisce un consapevole inserimento sociale, perché abitua a trarre conclusioni certe solo da ipotesi fondate, a ragionare in sostanza con la propria testa, senza cadere vittima dei tanti imbonitori che incessantemente si affacciano alla ribalta quotidiana.

Che questi siano gli obiettivi che si vogliono raggiungere attraverso lo studio della matematica lo si può cogliere anche osservando la tipologia di quesiti sempre presenti nelle prove degli Esami di Stato, che possono costituire un valido punto di riferimento per dedurre le conoscenze ritenute irrinunciabili al termine degli studi secondari. In tal senso i quesiti degli Esami di Stato, che di seguito si riportano come esempio, possono essere visti come precisi e ben definiti obiettivi didattici. Sono quesiti che richiedono risposte in cui si deve *illustrare e dedurre*, in una parola *argomentare* con richiami espliciti a principi o teorie, fornendo motivazioni chiare e convincenti, che presuppongono che i candidati abbiano maturato una forte linearità di pensiero e sviluppato buone capacità di esposizione. “*Argomentare in maniera razionale*” come afferma anche l'INVALSI, è uno degli obiettivi più alti affidati alla matematica.

**Anno 2009**

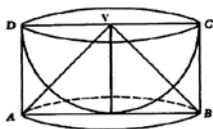
Sono dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ . Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di  $A$  in  $B$ , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biettive?

“*Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni*”. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.



Nei “*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*”, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio  $r$  e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono

di vertice  $V$  in figura.

**Anno 2008**

Si consideri la seguente proposizione: “ Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area”. Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

**Anno 2007**

Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera  $S$  e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta  $r$  passante per il centro di  $S$ , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro  $O$  fissato è un *gruppo*. (PNI)

**Anno 2006**

I poliedri regolari - noti anche come *solidi platonici* - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64.a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

*Bruno de Finetti* (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: “*che cos'è la probabilità?*” era solito rispondere: “*la probabilità non esiste!*”. Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?(PNI)

**Anno 2005**

Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare  $\sin 18^\circ$ ,  $\sin 36^\circ$ .

I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?

Come si definisce  $n!$  ( $n$  fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

**Anno 2004**

La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radiani*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

**Anno 2003**

Dopo aver fornito la definizione di “rette sghembe”, si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio le tre rette  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , due a due distinte, se  $x$  ed  $y$  sono sghembe e, così pure, se sono sghembe  $y$  e  $z$  allora anche  $x$  e  $z$  sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

**Anno 2002**

Se  $a$  e  $b$  sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono  $n$ ?

Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra omotetia e similitudine nel piano.

**Anno 2001**

Indicata con  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, si sa che  $f(x) \otimes l$  per  $x \otimes a$ , essendo  $l$  ed  $a$  numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che  $f(a) = l$  e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo  $[a, b]$  e tale che, per ogni  $x$  di tale intervallo, risulti  $f'(x) = 0$ . Dimostrare che  $f(x)$  è costante in quell'intervallo.

Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

**Anno 2000**

Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale tale che valgano le seguenti condizioni:

$$f(x_0) > 0, f'(x_0) > 0, f''(x_0) = 0,$$

dove  $x_0$  è un particolare valore reale.

Spiegare perché tali condizioni non sono sufficienti a determinare l'andamento di  $f(x)$  in un intorno di  $x_0$ .

### Anno 1998

La formula  $e^{i\pi} + 1 = 0$  è generalmente ritenuta tra le più belle che si incontrano in matematica e lega tra di loro quelli che da taluno sono stati definiti i cinque personaggi fondamentali della matematica: 0, 1,  $e$ ,  $i$ ,  $\pi$

Il candidato illustri sinteticamente il significato di  $e$ ,  $i$  e  $\pi$  evidenziandone anche qualche aspetto più rilevante sotto il profilo storico.

MICHELANGELO DI STASIO

## 7.3 Riferimenti storici

Nei quesiti d'esame che si riportano i riferimenti storici si limitano a qualche nome di matematico e a qualche data; tuttavia pure queste scarse notizie possono avere una loro funzione positiva, per esempio possono stimolare gli insegnanti, che negli anni successivi faranno esercitare i loro allievi sui quesiti delle prove degli anni precedenti, ad approfondire le notizie per meglio collocare la questione matematica nel contesto storico e culturale in cui è maturata e si è sviluppata.

A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».

Il numero  $e$  di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di  $e^x$  è  $e^x$ ? (2005)

Nel piano sono dati: il cerchio  $\gamma$  di diametro  $OA = a$ , la retta  $t$  tangente a  $\gamma$  in  $A$ , una retta  $r$  passante per  $O$ , il punto  $B$ , ulteriore intersezione di  $r$  con  $\gamma$ , il punto  $C$  intersezione di  $r$  con  $t$ .

La parallela per  $B$  a  $t$  e la perpendicolare per  $C$  a  $t$  s'intersecano in  $P$ . Al variare di  $r$ ,  $P$  descrive il luogo geometrico  $G$  noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)]. (2003)

Dimostrare, usando il **teorema di Rolle** [da Michel Rolle, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^n + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 = 0.$$

Il seguente è uno dei celebri problemi del Cavaliere di Méré (1610 - 1685), amico di Blaise Pascal: “giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?” (2002)

MICHELANGELO DI STASIO

## 7.4 L'insufficienza delle ore di insegnamento

Tra i commenti dei commissari impegnati nei corsi di ordinamento si trovano molte richieste del tipo “è necessario aumentare il numero di ore settimanali di insegnamento della matematica”; analogamente, tra quelli dei docenti del PNI ci sono commenti della forma “il numero di ore per svolgere i programmi sono insufficienti”. Si nota anche un suggerimento “finanziare almeno 20 ore di sostegno e potenziamento della materia”. L'esiguo tempo curriculare a disposizione diviene, spesso, una delle principali cause addotte dai docenti per il mancato svolgimento di interi capitoli della matematica “i quesiti contemplano una gamma di contenuti troppo ampia rispetto al tempo di cui si dispone durante l'anno scolastico per poterli trattare o ripassare”.

È veramente necessaria questa affannosa “corsa contro il tempo”?

Al tema d'esame è possibile prepararsi, gradualmente, nell'intero triennio. Si possono proporre alcuni punti dei problemi o quesiti già a partire dal terzo anno. Si pensi, ad esempio, al quesito 2 (relativo alle applicazioni) comune ad entrambi gli indirizzi. Far acquisire i concetti fondamentali, dagli allievi, consolidarli riproponendo di anno in anno alcune questioni tratte dai temi d'esame, può consentire di svolgere i programmi più velocemente e senza rinunciare alle caratteristiche che rendono così straordinario il pensiero matematico. Si può scegliere di lavorare per grandi temi e poi creare collegamenti di raccordo allo specifico richiesto.

Pur valutando positivamente l'accoglimento da parte del Ministero della richiesta di un maggior numero di ore di matematica nel liceo scientifico della riforma, il tempo non sembra essere il vero problema quando si sceglie un insegnamento che sia di *qualità* e non di *quantità*.

MARIA COCOZZA

## 7.5 Alcune considerazioni sui commenti dei commissari d'esame

Perché una 'analisi' dei commenti? Perché una riflessione sulle riflessioni? Quali i principi guida, quali gli obiettivi per ritornare su ciò che i commissari di matematica hanno percepito, ascoltato, sentito subito dopo la prova d'esame? Quei commenti "a caldo" meritano di essere rivisitati? Possono offrire un contributo di ulteriore conoscenza, illuminare orizzonti di lavoro e di consapevolezza per studenti ed insegnanti?

Le analisi statistiche condotte sugli esiti dello svolgimento del compito di matematica nei licei scientifici (ordinamento e sperimentazioni) ci informano che i nostri studenti sono mediamente competenti. Infatti, la prova di matematica è risultata sufficiente per la maggioranza di essi; si può concludere che la loro preparazione specifica sia adeguata.

Eppure i nostri studenti:

- mostrano una sempre minore capacità di autonomia e di organizzazione del lavoro durante l'esame di stato.
- riferiscono di prove complicate e della loro difficoltà nel sostenerle senza l'aiuto di esperti.
- continuano a risultare, nelle stime Europee, poco preparati rispetto a quelli di molti altri Paesi, e l'opinione pubblica ne è sempre più convinta come risulta dai frequenti sondaggi.

I commenti "a caldo" sono quelli richiesti ai professori di matematica, commissari d'esame nella sessione dell'esame di stato 2009, con la compilazione di un questionario. A curare la rilevazione – realizzata in rete attraverso il portale [www.matmedia.it](http://www.matmedia.it) – è stata la Facoltà d'ingegneria della S.U.N. mentre Il MIUR ne ha diramato la notizia, con nota formale del direttore generale per gli ordinamenti scolastici, alle commissioni d'esame operanti sull'intero territorio nazionale. Alle consistenti messe di dati – ampiamente riportate nelle pagine precedenti – si aggiunge il consistente numero di commenti, una varietà di opinioni a volte molto contrastanti che tracciano, sul piano della soddisfazione un continuum da *molto semplice ad assolutamente inadeguata*.

Come leggere questi dati? Sono interessanti da un punto di vista statistico? Possiamo interpretarli diversamente? Attorno ad un "tavolo" di discussione predisposto dalla presidenza della seconda facoltà di Ingegneria S.U.N., ci siamo riuniti come gruppo di lavoro per un'analisi della prova di matematica. È già il secondo anno che il preside della facoltà, Michele Di Natale si fa promotore di una iniziativa dedicata alla didattica della matematica, che ha incontrato la collaborazione di Emilio Ambrisi, ispettore ministeriale, di professori universitari e di docenti della scuola secondaria di secondo grado.

Un invito a ragionare su temi e problemi troppo spesso risolti con rassicuranti stereotipi del tipo: *docenti impreparati e/o studenti incapaci* che riempiono le pagine dei quotidiani durante l'esame di stato, ha dato a noi tutti la possibilità di pensare "insieme", di tentare un'analisi qualitativa dei commenti sulla scorta di un'esperienza quotidiana con gli studenti condivisa da tanti anni.

Fuori dalla logica dicotomica del dato apparente *facile-difficile* e consapevoli di non avere certezze su cui fondare il nostro lavoro, né verità da divulgare, ci proponiamo di partecipare e contribuire al dibattito, sempre ricco e vitale, sulla didattica della matematica, assumendo un punto di vista attento alle continue sollecitazioni ad esso.

Alcuni dei commenti suddetti:

- *Finalmente una prova non ripetitiva negli argomenti trattati, non laboriosa di calcoli e relativa ad argomenti dell'intero triennio.*
- *Nonostante i risultati deludenti ottenuti dagli studenti esaminati il compito è sembrato più semplice nel panorama degli ultimi anni. I quesiti erano sicuramente facili.*
- *I problemi e i quesiti propongono spesso situazioni geometriche piuttosto complesse rispetto ai programmi di geometria affrontati nei licei.*
- *Scarse questioni squisitamente di analisi e quesiti di difficoltà troppo diverse. Argomenti marginali rispetto alla didattica vera svolta nei licei scientifici. Molti quesiti incentrati sul programma svolto in anni precedenti*

Cosa appare emergere:

- La struttura del compito (problema e quesiti) incontra consensi.
- La prova 2009 è stata valutata positivamente dai docenti non altrettanto dagli studenti.
- Troppi gli argomenti trattati, e compito impegnativo sul piano concettuale.

La questione è delicata e per certi versi appare senza soluzioni. Ci è sembrato di cogliere un comune malcontento, talvolta celato ma tante altre palesemente espresso in cui sembra impossibile coniugare la formazione culturale dei nostri giovani con una preparazione nel corso di studi con passione e continuità.

Le numerose critiche espresse, prevalentemente in riferimento alla molteplicità dei contenuti, mettono in luce le difficoltà nell'orientare l'insegnamento della matematica. Soprattutto in vista dell'esame, appare gravoso dover ritornare su questioni di varia natura in modo disarticolato, con studenti che mediamente sono poco interessati ad una preparazione mirata.

Circola sempre più tra gli studenti e talvolta anche tra i docenti un diffuso fatalismo/delega che non giova certamente alla motivazione.

C'è chi ipotizza di accompagnare la traccia di matematica con un sommario, un breve compendio di suggerimenti che orientano lo studente preparato con spunti di riflessione e formule, in grado di guidarlo anche nella comprensione ed interpretazione del testo; ma non mancano note polemiche di chi è in disaccordo.

Né manca chi propone di creare correnti di opinioni in modo da orientare le commissioni ministeriali verso temi specifici, relativi a programmi più contenuti che permetterebbe una preparazione più dettagliata e forse più efficace ai fini dello svolgimento del compito; oppure si pensa ad una revisione dei temi puntando su livelli più concettuali e meno applicativi.

Le ipotesi di lavoro sono tante, tanti gli spunti, ma tanti anche gli interrogativi che accompagnano quotidianamente il nostro lavoro, ai quali sarebbe bello poter rispondere con orgoglio che i nostri ragazzi amano la matematica, che il dibattito è fecondo e i risultati soddisfacenti.

Sappiamo bene, invece, che sentiamo sempre la precarietà del nostro lavoro, in bilico tra le mille difficoltà che la scuola vive. Noi professori di matematica del liceo, spesso bersaglio di famiglie distratte, siamo insegnanti di “frontiera” con scarso seguito, abituati a modulare e rimodulare costantemente i nostri obiettivi e programmi per incontrare il favore di generazioni di giovani annoiati e stanchi a cui il “progresso” della nostra civiltà ha donato gli agi della tecnologia, sollevandoli da fatiche “brute”, ahimè non solo fisiche ma anche, e soprattutto – ed è quanto è di nostro interesse – intellettuali.

ANNA MARIA PEZONE

## 8 I Commenti dei docenti su Matmedia

Molti commenti riguardano la conformità degli argomenti rispetto *al programma ministeriale* o comunque ai *programmi realmente svolti*. Taluni condividono che la prova di matematica per l'esame di stato debba verificare competenze acquisite dopo un quinquennio di scuola superiore ad indirizzo scientifico, la maggioranza ritiene, invece, che quesiti e problemi dovrebbero riguardare in modo specifico *il programma di analisi che tradizionalmente viene svolto in quinta* (qualcuno fa riferimento al *programma ministeriale della quinta classe*). Si chiede perciò di evitare tutto ciò che non è analisi infinitesimale, considerato pertanto come *argomento non inerente*. Alcuni commenti suggeriscono di proporre problemi di applicazione di teoremi di analisi come lo *studio completo della funzione*, e richiederne al più le *dimostrazioni* o *la teoria nei quesiti*. Così facendo si renderebbe, tale prova, affrontabile, con risultati meno deludenti, anche dagli alunni deboli.

Gli insegnanti (questo appare nella maggioranza dei casi) vogliono lo studio della funzione proposto nella forma più standard e canonica possibile: è assegnata la funzione... (possono andar bene anche dei parametri da determinare sotto particolari condizioni). Poi, si studi la funzione... si disegni il grafico... si calcoli l'area racchiusa tra il grafico e... Non è che lo studio della funzione non sia importante anzi è molto bello saper dedurre dai simboli di una espressione analitica una forma. L'andamento è sempre una riduzione alla geometria, il passaggio dal campo percettivo di numeri e simboli a quello visivo, l'immersione di una forma geometrica in uno spazio ambiente. Ci si è chiesti spesso perché non abituare alla operazione inversa: da una forma risalire all'espressione analitica, alla formula. È certamente un poco più complicato ma c'è anche una vasta gamma di problemi che si collocano in posizione intermedia tra l'una e l'altra delle due formulazioni e che giocano sui movimenti, sulle trasformazioni ed altro. Ma ritorniamo allo studio della funzione che rappresenta l'argomento che gli insegnanti dichiarano a maggioranza di privilegiare, la prova scritta per eccellenza, il terreno su cui occorre impegnare gli alunni. Perché questo argomento ha avuto così forte radicamento nell'azione didattica dei docenti? Si fa Analisi Matematica e quale obiettivo terminale, quale meta c'è lo studio della funzione, il ricavarne la forma, l'andamento. Il perché è presto detto: è un accordo scuola/collettività. Gli allievi si iscrivono all'università, molti in facoltà scientifiche che richiedono al primo anno un esame di matematica o l'esame di Analisi I, un corso che sostanzialmente ripercorre quello che si è fatto al liceo: numeri reali, limiti, derivate, integrali e studio di funzioni. Tutto questo è importante perché è anche una misura della bravura dell'insegnante: è bravo l'insegnante i cui alunni non hanno molte difficoltà a superare l'esame di analisi – uno scoglio duro specie nelle facoltà d'ingegneria. E questo va meglio negli indirizzi di PNI. Allora è giustificato che i docenti protestino se all'esame di stato si chiede qualche altra cosa; hanno lavorato per confermare o migliorare la propria stima presso la collettività del territorio e poi gli alunni non fanno il compito

di maturità! A sbagliare è certo il Ministero ad assegnare prove che non c'entrano, su argomenti che non sono di programma, perché i programmi se li sono fatti loro. E niente sarebbe più giusto e corretto, se non che questo non sembra essere giusto per altri versi. Prima di tutto non è detto che chi al primo anno del corso di laurea prescelto non incontri difficoltà negli esami di matematica e di Analisi I vada poi bene o non incontri altro tipo di difficoltà che lo portano ad abbandonare l'università (e gli abbandoni sono consistenti). Non è detto che questo sia dunque il punto di forza di una formazione efficace che metta il giovane nelle condizioni di proseguire al meglio delle sue capacità. Che succede nelle facoltà d'ingegneria? e in altri corsi universitari che prevedono un corso di matematica I? Qualche docente dice che ha notato una certa disattenzione da parte degli alunni: quasi quasi un corso inutile, tanto si fa quel che si è fatto al liceo! Eppure nei test d'accesso le cose vanno male. Quindi da una parte docenti e genitori soddisfatti di quello che fanno e di quello che gli alunni mostrano di sapere agli esami, dall'altra l'università che non è soddisfatta. Allora i *corsi zero* quelli che le facoltà organizzano e consigliano ai giovani che non hanno ottenuto punteggi soddisfacenti ai test di accesso. Questi corsi prevedono per la maggior parte i prerequisiti ma non l'analisi matematica, prevedono quello che "viene prima": aritmetica e geometria (piana e solida), algebra e algebra lineare, geometria analitica, trigonometria, calcolo combinatorio. Allora perché spingere a questo lavoro supplementare di organizzare corsi aggiuntivi per aggiustare una preparazione che appare inadeguata non sarebbe meglio pensarci prima eliminare l'analisi dai corsi pre-universitari della scuola secondaria superiore? Focalizzando e approfondendo meglio gli "elementi", ciò che dovrebbe essere fondamentale e necessario? Chi ha ragione? L'università che giudica inefficace l'apprendimento realizzato a volte superfluo perché ripete al primo anno un corso di analisi che sostanzialmente ricapitola ciò che gli alunni già hanno fatto? O hanno ragione i docenti dei licei?

Forse la risposta è da ricercare in un commento degli stessi docenti, dopo l'apprezzamento per la tipologia di verifica, traspare chiaramente una riflessione sulla ricaduta didattica di tale scelta; si ravvisa in essa una implicita indicazione a favorire una didattica della matematica che stimoli continuamente gli studenti alla ricerca *dei significati* ed all'uso *consapevole dei concetti nei contesti problematici*, indipendentemente dall'argomento, piuttosto che enfatizzare il calcolo artificioso su cui spesso gli alunni *si allenano nell'ultimo anno di corso*.

MARIA GABRIELLA SGUEGLIA

# UN SYLLABUS\*

## per la prova scritta agli esami di stato

### Premessa

La prova scritta agli esami di stato dei licei scientifici costituisce un momento culminante della verifica dell'azione didattica essendo finalizzata ad accertare le conoscenze specifiche di matematica apprese nel corso di studi.

Su tali “conoscenze specifiche” si è sviluppato in questi ultimi anni un intenso dibattito in quanto il loro riferimento normativo risiede o in programmi in gran parte superati e disattesi (furono diramati con una nota del 18.9.1945 del Ministro A. Ruiz) o in programmi (PNI - piani di studio Brocca) molto vasti per essere compiutamente attuati.

Il presente Syllabus rappresenta la sintesi di tale dibattito compiuta attraverso il lavoro di un gruppo di esperti rappresentativo del mondo della matematica e della sua didattica che ha operato su invito della Direzione Generale per gli Ordinamenti Scolastici e per l'Autonomia Scolastica e il coordinamento della Struttura Tecnica Esami di Stato.

Il Syllabus costituisce pertanto una descrizione di ciò che dovrebbe essere richiesto nella prova scritta di matematica dell'esame di Stato per il Liceo scientifico di ordinamento e per i licei che attuano sperimentazioni di tipo PNI e Brocca (gli argomenti relativi sono evidenziati in corsivo). La forma prescelta per tale descrizione è quella della tipologia delle “domande” alle quali lo studente deve essere in grado di rispondere: *Calcolare/Determinare, Applicare/Risolvere, Spiegare/Illustrare/Definire, Dimostrare/Dedurre*.

---

\* Hanno partecipato al lavoro, sviluppato dal dicembre 2008 al luglio 2009: Emilio Ambrisi, Gabriele Anzellotti, Ferdinando Arzarello, Elena Beretta, Claudio Bernardi, Tiziana Bindo, Giorgio Bolondi, Domenico Bruno, Mauro Cerasoli, Lucia Ciarrapico, Mariangela Chimetto, Biagio Dibilio, Domenica Di Sorbo, Michelangelo Di Stasio, Franco Eugeni, Paolo Francini, Alberto Gandolfi, Antonino Giambò, Annamaria Gilberti, Maria Paola Giovine, Marta Herbst, Andrea Laforgia, Paolo Lorenzi, Walter Maraschini, Alessandro Militerno, Aurelia Orlandoni, Roberto Ricci, Enza Russo, Carlo Sbordone, Luigi Tomasi, Luigi Verolino.

Il Syllabus così organizzato presenta elementi di novità sia con riferimento al superamento dei tradizionali capitoli della matematica – ne rafforza, infatti, l'intima connessione interna – sia con riferimento agli obiettivi essenziali e alle innovazioni che oggi si prospettano per un efficace insegnamento e apprendimento della matematica intendendo anche che le conoscenze matematiche debbano essere disponibili come modelli per rappresentare e affrontare situazioni e problemi di varia natura.

## 1 Calcolare/Determinare

- Misure di angoli in radianti e in gradi.
- Il numero di permutazioni, disposizioni, combinazioni in un insieme.
- La potenza n-esima di un binomio.
- Nel piano, l'equazione di una retta per un punto e parallela o perpendicolare ad una retta data; la pendenza di una retta assegnata e l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto.
- L'equazione cartesiana di luoghi geometrici notevoli. In particolare: circonferenza, ellisse, parabola e iperbole.
- Le derivate di funzioni composte.
- Massimi e minimi di una funzione, punti di flesso, asintoti.
- Integrali indefiniti immediati o ad essi riconducibili.
- Integrali per parti e per sostituzioni.
- Aree delle superfici e volumi dei solidi (poliedri e solidi di rotazione, solidi di cui siano note le sezioni lungo una certa direzione).
- Valori approssimati di funzioni e grandezze anche utilizzando una calcolatrice tascabile.

### PIANI DI STUDIO PNI e BROCCA

- *La media, mediana e scarto quadratico medio di un insieme di dati*
- *La probabilità di eventi in situazioni uniformi e a partire dalla probabilità di altri eventi.*
- *Sottoinsiemi del piano definiti da sistemi di disequazioni.*
- *Equazioni di traslazioni, rotazioni, simmetrie nel piano soddisfacenti determinate condizioni.*
- *Soluzioni approssimate di equazioni.*
- *L'approssimazione di un integrale definito con una procedura di calcolo numerico.*
- *Proposizioni logicamente equivalenti. La negazione di proposizioni*

## 2 Applicare/Risolvere

- Il teorema di Ruffini,  $P(x)$  è divisibile per  $x - a$  se e solo se  $P(a) = 0$ .
- I teoremi della geometria Euclidea piana e solida. In particolare: il teorema dell'angolo esterno, i teoremi di Pitagora e di Talete, il teorema delle tre perpendicolari.
- Equazioni, disequazioni, sistemi relativi a funzioni goniometriche, esponenziali, logaritmiche e alla funzione modulo.
- Le formule di addizione e le loro immediate conseguenze (duplicazione, bisezione)
- Il teorema dei seni e il teorema del coseno per la risoluzione dei triangoli.
- Limiti notevoli di successioni e di funzioni. In particolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = +\infty \quad \text{per } a > 1, \beta > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\beta} = 0 \quad \text{per } a > 1, \beta > 0$$

- Il teorema di Lagrange, il teorema di Rolle, il teorema di De L'Hospital, per lo studio delle funzioni e del grafico di una funzione o per il calcolo dei limiti.
- I teoremi del calcolo integrale nella determinazione delle aree e dei volumi.
- Problemi che richiedono di determinare il valore massimo o minimo di una grandezza che si può rappresentare come una funzione derivabile di una opportuna variabile.
- Problemi geometrici di 1° e 2° grado dipendenti eventualmente da un parametro.

### PIANI DI STUDIO PNI e BROCCA

- *Cambiamenti di coordinate: cambiamenti di scala.*
- *Le formule per la somma dei primi  $n$  termini di una progressione aritmetica o geometrica.*
- *Il principio di induzione.*
- *Il teorema della media integrale.*
- *Probabilità condizionata e la formula di Bayes.*
- *La distribuzione binomiale. La distribuzione normale: in particolare il suo uso in relazione agli errori di misura.*

## 3 Spiegare/Illustrare/Definire

- Incidenza, parallelismo, perpendicolarità tra rette e piani nello spazio.

- I poliedri (parallelepipedi, prismi, piramidi, poliedri regolari) e gli sviluppi piani delle loro superfici. I solidi di rotazione (cono, cilindro e sfera), le loro sezioni piane e gli sviluppi piani delle loro superfici.
- Il principio di Cavalieri.
- Sottoinsiemi, prodotto cartesiano di due insiemi, funzioni, funzioni iniettive e suriettive, composizione di due funzioni; funzioni invertibili, funzioni inverse e relativi grafici.
- Funzioni limitate; funzioni crescenti in un intervallo, massimi e minimi (relativi e assoluti); funzioni periodiche.
- Le funzioni  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\arcsen x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$
- Le funzioni esponenziali e logaritmiche: proprietà e grafici.
- Successioni numeriche; in particolare: progressioni aritmetiche e geometriche.
- Limite di una successione e limite di una funzione reale .
- Esempi di funzioni discontinue o non derivabili in qualche punto.
- Lunghezza della circonferenza e area del cerchio.
- Il significato geometrico di *integrale definito* per una funzione reale definita in un intervallo.

#### PIANI DI STUDIO PNI e BROCCA

- *Relazione di Eulero tra numero di vertici, spigoli, facce dei poliedri.*
- *Concetti primitivi, definizioni, assiomi, teoremi. Il V postulato di Euclide considerazioni storiche e critiche.*
- *Il concetto di algoritmo. Algoritmi notevoli, in particolare l'approssimazione di  $e$  e  $\pi$ .*
- *L'indipendenza di eventi e le concezioni di probabilità.*

## 4 Dimostrare/Dedurre

- Uguaglianze e disuguaglianze, algebriche e trigonometriche.
- I cinque poliedri regolari.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- Le espressioni della derivata prima di  $x^n$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ , e da queste ricavare quelle di:  $\log x$ ,  $\arcsen x$ ,  $\tan x$ ,  $\arctan x$ .
- Una proposizione a partire da un'altra data. Ad esempio:
  - dal teorema di Lagrange, la disuguaglianza:  $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ ;
  - la crescita o decrescita di una funzione utilizzando il teorema di Lagrange;
  - dal teorema di Lagrange il segno di una funzione;
  - dal grafico di una funzione  $f(x)$ , la costruzione dei grafici di:  $|f(x)|$ ,  $1/f(x)$ ,  $f(x-k)$ ,  $f(kx)$ ,  $kf(x)$ ,  $k + f(x)$ , con  $k$  numero reale;
  - l'unicità degli zeri di una funzione dal teorema di Rolle.

## Indice

<i>Editoriale</i> di EMILIO AMBRISI	p.	3
CARLO BERNARDINI		
<i>La sorte degli insegnanti</i>	“	7
<i>Indagine Matmedia 2009</i>	“	11
LUIGI VEROLINO		
<i>Le calcolatrici all’esame di Stato</i>	“	93
ANTONINO GIAMBÒ		
<i>Calcolatrice sì o calcolatrice no?</i>	“	97
DOMENICO BRUNO		
<i>“C’è qualcosa di nuovo... , anzi d’antico”</i>	“	101
LUIGI VEROLINO		
<i>Un quesito di storia della Matematica agli esami di Stato</i>	“	103
G. CONTI, S. GUIDELLI, A. TROTTA		
<i>Curve notevoli in architettura</i>	“	113
<b>Inserzioni:</b>		
<i>La Scuola di Atene: il rovesciamento dello sguardo (6) – Interventi sulla prova del 2007 (96) – La questione del “quinto quesito” del 2009 (112).</i>		



Il riordino degli studi secondari superiori è fatto. Dal prossimo anno scolastico avremo nuovi licei, istituti tecnici e professionali. Il dipinto di Raffaello, immagine di vita della “filosofica famiglia”, ben si associa a quello che vorremmo la scuola fosse. Un ambiente di luce, di ben essere intellettuale e fisico, risuonante delle note di un perenne *inno alla gioia*. Un ambiente pervaso di *Leggerezza/Rapidità/Esattezza/Visibilità/Molteplicità/Consistenza* com'è Italo Calvino a descrivere nelle sue *Lezioni Americane* dove trova il suo posto il *crystallo* e la *fiamma*.

Il *crystallo*, *immagine d'invarianza e di regolarità di strutture specifiche*, la *fiamma*, *immagine di costanza d'una forma globale esteriore, malgrado l'incessante agitazione interna*. *Crystallo e fiamma, due forme di bellezza perfetta da cui lo sguardo non sa staccarsi, due simboli morali, due assoluti, due categorie per classificare fatti e idee e stili e sentimenti* da cui l'educazione dei giovani non dovrebbe mai allontanarsi. Ragione e passione a governare la scuola del sapere, dell'insegnamento e dell'apprendimento per il futuro della società. (E. A.)

## Mathesis

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche  
 Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze  
 Seconda Università di Napoli  
 Via Vivaldi 43 – 81100 Caserta  
[www.mathesisnazionale.it](http://www.mathesisnazionale.it)