M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione *R*, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno all'asse *y*.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di *k* per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di *R*.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia *A(t)* l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa *t*. Si determini *A(1)*.
5. Si determini il valore di *t* per il quale *A(t)* è minima.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo $[0\,;+\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \quad se \quad x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se *f* è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0\,;+\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta *r* tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia *n* un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di *n*, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente *r* e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $sen18°$, $sen36°$.
2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
3. Si dimostri che la curva $y = x\, sen\, x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sen\, x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sen\, x = -1$
4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
5. Il numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x ?
6. Come si definisce $n!$ (*n* fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?
7. Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali *k* è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.
8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E' un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:
$$sen^2(35°) + sen^2(55°)$$
ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.
10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = arctg\, x - arctg\, \frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e *r* d'equazioni:

$$\lambda:\ x^2 = 4(x-y) \quad \text{e} \quad r:\ 4y = x+6 .$$

1. Si provi che λ e *r* non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da *r.*
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta *s,* simmetrica di *r* rispetto all'asse x.
4. Si determini il valore di *c* per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x.
5. Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo $[0\,;+\infty\,[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1 \quad se \quad x>0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se *f* è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0\,;+\infty\,[$, un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta *r* tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia *n* un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di *n*, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente *r* e dalle due rette: $x = \dfrac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare *sen18°, sen36°*.
2. Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva $y = x\, sen\, x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sen\, x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sen\, x = -1$.
3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ *e* φ la cui composizione $\sigma \circ \varphi$ dia luogo alla traslazione di equazione:
$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$
Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\varphi \circ \sigma$.
4. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
5. Come si definisce e quale è l'importanza del numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.
6. Le rette *r* e *s* d'equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ *e* $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ.
7. Come si definisce *n!* (*n fattoriale*) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate (3, 4).
9. Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?
10. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.